MATEMÁTICA PARA TODOS

ADRIÁN PAENZA

Lectulandia

Adrián Paenza, ganador del premio Leelavati al mejor divulgador de matemáticas del mundo y autor de exitosos títulos como *Matemagia* o *¿Pero esto también es matemática?*, nos desafía una vez más a pensar con nuevos problemas de lógica, estrategia, probabilidades e intuición.

Como dijo Richard Hamming:

«Conocimiento y productividad son como el interés compuesto. Dadas dos personas con —aproximadamente— la misma habilidad, si una de ellas trabaja un diez por ciento más que la otra, la que trabaja más va a terminar por producir más del doble que la otra. Cuanto más sabes, más aprendes. Cuanto más aprendes, más puedes hacer. Cuanto más puedes hacer, más oportunidades vas a tener. Funciona como el interés compuesto. No quiero dar un número porque no es algo exacto, pero dadas dos personas con la misma habilidad, la persona que pueda dedicarle todos los días una hora más a pensar que la otra, va a terminar siendo muchísimo más productiva en comparación a lo largo de la vida».

Pensar nos educa y *Matemática para todos* es el nuevo aporte de Adrián Paenza a la divulgación de las matemáticas.

www.elsolucionario.org
free online eBooks and Solutions Manual
can be found at www.elsolucionario.org

Adrián Paenza

Matemática para todos

ePub r1.0
Titivillus 22.05.2020

Título original: *Matemática para todos*
Adrián Paenza, 2012
Ilustraciones: Augusto Costhanzo
Diseño de cubierta: Marc Cubillas

Editor digital: Titivillus
ePub base r2.1

www.elsolucionario.org

A mis padres, Fruma y Ernesto. Todo lo que soy se lo debo a ellos dos.

A mi hermana Laura y a mi cuñado Daniel.

A todos mis sobrinos: Lorena, Alejandro, Máximo, Andrea, Ignacio, Paula, Santiago, Lucio, Matías, Brenda, Miguelito, Viviana, Diego, Sabina, María Soledad, María José, Gabriel, Mía, Valentín, Lucas, Ulises, Max, Amanda, Whitney, Jason, Landon, Anderson, Griffin y Ellie.

A Carlos Griguol y León Najnudel, dos faros en mi vida.

A mis amigos Miguel Davidson, Leonardo Peskin, Miguel Ángel Fernández, Héctor Maguregui, Cristian Czúbara, Alberto Kornblihtt, Lawrence Kreiter, Gary Crotts, Dennis Fugh, Kevin Bryson, Claudio Martínez, Alejandro Fabbri, Víctor Marchesini, Luis Bonini, Fernando Pacini, Andrés Nocioni, Emanuel Ginóbili, Gerardo Garbulsky, Marcos Salt, Santiago Segurola, Julio Bruetman, Diego Golombek, Ariel Hassan, Woody González y Luis Scola.

A mis amigas Ana María D'Alessio, Nilda Rozenfeld, Teresa Reinés, Beatriz de Nava, Beatriz Suárez, Nora Bernárdez, Karina Marchesini, Laura Bracalenti, Etel Novacovsky, Alicia Dickenstein, Erica Kreiter, Betty Cooper, Marisa Giménez, Norma Galletti, Carmen Sessa, Carina Maguregui, Marcela Smetanka, Mónica Müller, María Marta García Scarano, Mariana Salt, Nora Bar y Marisa Pombo.

A la memoria de los seres queridos que perdí en el camino: Guido Peskin, mis tías Delia, Elena, Miriam, Ñata y Elenita; a mi tío

Saúl; a Noemí Cuño, Manny Kreiter, Lola Bryson, Vivian Crotts y mi primo Ricardo. Y a la memoria también de mi querido Jorge Guinzburg.

www.elsolucionario.org

Matemática de la suerte

La matemática es una usina constante y consistente de problemas que parecen atentar contra la intuición. Pero, justamente, al pensarlos uno se educa, se entrena y se prepara porque la experiencia demuestra que es muy posible que vuelvan a aparecer en la vida cotidiana usando disfraces mucho más sofisticados.

«*Conocimiento y productividad son como el interés compuesto. Cuando hay dos personas con aproximadamente la misma habilidad, si una de ellas trabaja un diez por ciento más, producirá más del doble que la otra. Cuanto más sabés, más aprendés. Cuanto más aprendés, más podés hacer. Cuanto más podés hacer, más oportunidades vas a tener. Funciona como el interés compuesto. No quiero dar un número porque no es algo exacto, pero si hay dos personas con la misma habilidad, la que se dedique a pensar una hora o más todos los días terminará siendo muchísimo más productiva a lo largo de la vida, en comparación con la otra persona*»[1].

1. ¿PARA QUÉ SIRVE LA MATEMÁTICA?

www.elsolucionario.org

La lotería de Ontario

La lotería de Ontario, en Canadá maneja un presupuesto aproximado de 6 mil millones de dólares anuales. De ese dinero, más de 2.300 millones provienen del juego, de la venta de billetes de lotería y de todas las variantes de Loto que usted conozca. Tal como sucede virtualmente en todo el mundo, la pasión por desafiar el azar y esperanzarse con la oportunidad de hacerse rico, hace que nosotros, los humanos, nos volquemos al juego en forma masiva. Algunos más, otros menos, pero inexorablemente casi todos hemos alguna vez «apostado» por algo que dependiera del azar. Y todo funciona en forma inversamente proporcional a lo que uno intuye: cuanto menor es la probabilidad de ganar, más paga la banca y, por lo tanto, pareciera que mayor es la atracción por apostar.

De todas formas, creo que no cabe ninguna duda de que *el juego* en sí mismo es un gran negocio. En algunos casos, está en manos privadas. En otros, en manos del Estado. En Canadá, es el gobierno federal y también los distintos municipios los que manejan los ingresos.

Por otro lado, esa cantidad de dinero que genera el juego invita a pensar que Ontario depende *fuertemente* de que la gente apueste, y cuanto más, mejor.

Hasta acá, todo bien: nada distinto de lo que sucede (supongo) en todo el mundo. Decenas de miles (y lo escribo de nuevo… *decenas de miles*) de personas en Ontario tienen locales a la calle en los que se venden los billetes, pero también funcionan unas máquinas que sirven para elegir números que luego figurarán en un ticket. Si quien apuesta eligió correctamente (digamos) seis números, entonces ganará el premio mayor. Si acertó menos, el premio se va reduciendo. Los dueños y empleados de estos negocios que tienen esas máquinas/computadoras, son *la cara del Estado.*

El 13 de julio del año 2001, hubo una pareja ganadora de 250.000 dólares. La Lotería, luego de haber hecho las verificaciones correspondientes, escribió un cheque a nombre del matrimonio Phyllis y Scott LaPlante. Hasta acá, nada raro. En definitiva, la pareja pudo exhibir el ticket (que habían conseguido por un dólar) con los seis números ganadores. La probabilidad de acertar es de una en diez millones pero, como le decía, por más reducidas que sean las chances, pareciera como que *siempre* hay un ganador.

Lo *llamativo* en el caso de los LaPlante es que eran dueños de uno de los locales en donde se emitían los tickets. El gobierno canadiense, cuando alguien gana una suma que supera los 50.000 dólares, inicia *de oficio* una investigación. En esta oportunidad, siendo los ganadores dos personas que estaban en ambos lados del «mostrador» (expendían billetes pero también los compraban), la búsqueda fue un poco más exhaustiva.

Como los dueños de los billetes son —en principio— anónimos al momento de la apuesta, una vez que alguien gana tiene que exhibir su identidad, el lugar en el que fue emitido y el día en que se produjo la transacción. Las autoridades advirtieron que esos mismos números habían sido jugados reiteradamente a lo largo de varios años y siempre en el mismo lugar: el negocio de los LaPlante. En vista de que ambos eran los dueños del local, se les pidió si podían mostrar tickets anteriores con esos números, ya que, según los registros en las computadoras oficiales, esos números venían siendo jugados durante muchos años. El matrimonio exhibió los tickets, los oficiales extendieron el cheque, y todo el mundo feliz. O no tanto.

El 25 de octubre del año 2006, después de más de cinco años, el programa de televisión *The Luck of the Draw* (*La Suerte del Sorteo*), de la Canadian Broadcasting Corporation (CBC) presentó un informe que desató un escándalo.

Bob Edmonds, un señor de 82 años, denunciaba una estafa que lo tenía como víctima. Frustrado porque había recurrido a las autoridades de la Lotería durante mucho tiempo, sin lograr que nadie le reconociera su derecho, Edmonds recurrió a la cadena de televisión, y encontró algunas personas que decidieron prestar atención a su historia.

De inicio había un problema serio: era obvio que Edmonds *no tenía el ticket que lo hubiera confirmado como ganador*. Eso hubiera sido más que

www.elsolucionario.org

suficiente. Sin embargo, los productores y periodistas del programa decidieron ir por un camino inesperado: contrataron a un matemático experto en estadística, Jeffrey Rosenthal de la Universidad de Toronto.

Rosenthal estudió el caso durante un tiempo, y aun corriendo el riesgo de ser injusto por la cantidad de detalles que quedarán en el camino, quiero contar muy brevemente lo que hizo: recurrió a la base de datos oficiales de manera de que nadie pudiera dudar de su origen.

En principio, detectó que los dueños y empleados de los locales que vendían los tickets con los números apostaban ellos mismos *uno de cada cien dólares que se jugaban por sorteo.* O sea, el 1% de las apuestas. Siguiendo con esa misma lógica, salvo que este grupo de personas tuviera un *don particular para leer el futuro o algún tipo de «suerte especial»*, ellos deberían ganar el *uno por ciento* de los tickets premiados.

Rosenthal revisó entonces los resultados de los siete años anteriores a la emisión del programa: 1999-2005 (son siete porque se incluyen tanto el año 1999 como el 2005). Durante ese lapso, separó a quienes fueron ganadores de 50.000 dólares o más, y detectó 5.713 tickets con ese tipo de premios.

Luego, si las personas que trabajaban en estos locales, convertidos en jugadores apostaban un 1% de los tickets, una estimación *razonable* sería suponer que ganaron aproximadamente 57 de las 5.713 veces.

Bueno, no era así. Los resultados que obtuvo Rosenthal mostraban algo asombroso: las personas como los LaPlante habían ganado más de ¡200 veces! (78 de ellos eran directamente los dueños y 131 ganadores entre los empleados). Solamente en el año 2005, 31 de los ganadores fueron personas ligadas con alguno de estos negocios, y tres ganaron más de *un millón de dólares*[2].

Por supuesto que ese dato tomado en forma aislada no es suficiente para condenar a nadie, pero es un *fuerte indicio,* o si usted lo prefiere, muy *sugerente.*

Los periodistas siguieron con la investigación que terminó con la producción del documental (que llevó el nombre de *The Fifth Estate*, *El quinto Estado*), y con el aporte de Rosenthal, descubrieron la trama subyacente.

Cuando Edmonds se presentó aquel día de julio del año 2001, Phyllis LaPlante recibió el ticket y lo escaneó como hacía habitualmente para ver si le había correspondido algún premio. La máquina *sonó dos veces,* indicándole que era un billete ganador… y de un premio muy importante. Por supuesto, no podía decirle que *no había ganado nada,* pero tampoco necesitó decirle que había ganado el premio mayor. Le extendieron un cheque por una suma ridículamente inferior y Edmonds se fue tranquilo. Al día siguiente, descubrió que algo no había funcionado bien, porque leyó en el diario que el matrimonio LaPlante había ganado el premio mayor, ¡y justo con sus números!

Edmonds siempre pensó que los LaPlante eran sus amigos. De hecho, durante años había ido al mismo local a jugar siempre los mismos números. Pero no era así. Las denuncias del pobre Edmonds resultaron estériles hasta que el programa de televisión generó el escándalo suficiente como para que las autoridades de la Lotería tuvieran que hacer una revisión del sistema. La investigación de Rosenthal permitió concluir que no sólo los LaPlante habían producido el fraude, sino que más de 140 negocios del mismo tipo se transformaron inmediatamente en sospechosos.

Si usted se está preguntando a esta altura cómo consiguieron los LaPlante los tickets antiguos que le mostraron a las autoridades, piénselo de la siguiente manera: ellos fueron conservando tickets *viejos* que jugaba Edmonds que nunca tuvieron —en principio— ningún valor. Pero ellos sabían bien que los números que jugaba su cliente eran siempre los mismos, y la mejor manera de poder corroborar que eran ellos los que habían ganado, era conservarlos por si eventualmente se producía esa circunstancia. Y así fue que pudieron *engañar* a las autoridades durante un tiempo. Lo mismo hacían con todos los clientes que repetían un patrón sistemáticamente: conservaban los tickets perdedores, por si en algún momento cambiaba la suerte. La matemática, el análisis estadístico de Rosenthal y la participación de los productores y periodistas del documental *The Fifth Estate* permitieron descubrir un robo no sólo en ese caso, sino que abrió las puertas para develar muchos otros que habían permanecido totalmente ignorados.

La historia continúa y, finalmente, herida la credibilidad del sistema de juego de esa parte del Canadá, las medidas actuales parecen *garantizar* otro tipo de transparencia. Después de cinco años Edmonds terminó cobrando 150.000 dólares (y no los 250.000 que le hubieran correspondido), y los LaPlante

www.elsolucionario.org

fueron condenados por fraude. En todo caso, un sistema burocrático, que uno supondría más cercano a nosotros que a los canadienses, le impidió a Edmonds ser escuchado desde el primer momento. El ombudsman de la provincia de Ontario, André Marin[3], produjo un informe en marzo del año 2007 detallando minuciosamente lo ocurrido y tratando de recuperar la credibilidad perdida.

Esta historia —aquí muy resumida— es posible que se haya repetido múltiples veces en distintas partes del mundo: no lo sé. Lo que sí sé es que gracias a la participación de un matemático se pudo descubrir un episodio que no fue aislado. Ontario necesitó modificar los controles que se hacían para recuperar la confianza del público, que jugaba *inconsciente* de la potencial defraudación que podía sufrir.

Parece una película, ¿no? Bueno, no, no fue una película, pero es una versión siglo XXI del *cuento del tío*. Y afortunadamente, la sociedad prepara sus anticuerpos para estas situaciones (los expertos en estadística, por ejemplo). No siempre se los utiliza y convoca como corresponde, pero merecen un reconocimiento especial. Rosenthal se lo ganó. Otros, anónimos, también.

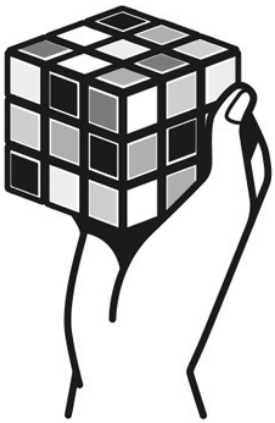
El juguete más vendido de la historia

¿Alguna vez se preguntó cuál es el «juguete» que más se vendió en la historia de la humanidad? ¿Cuáles podrían ser los candidatos? Pelotas y muñecas deberían estar muy arriba en el podio, ¿no? ¿Qué otros se le ocurren?

No sé si es posible dar una buena respuesta. En todo caso, yo no la tengo, pero sí me sorprendió saber que hay uno del cual se vendieron más de ¡350 millones de copias en los últimos 32 años!

Me estoy refiriendo a un cubo. Sí, a un cubo. No un cubo cualquiera, pero un cubo al fin. Erno Rubik era un escultor y profesor de arquitectura húngaro que enseñaba en la Academia Nacional de Arte Aplicado en Budapest, Hungría. Nació en julio de 1944, hijo de una madre poeta y un padre que era ingeniero aeronáutico. Corría el año 1974, época en la que no había computadoras personales ni programas que permitieran reemplazar a los diseños manuales, y Rubik tenía ante sí uno de los desafíos a los que se enfrentaban los de su época (y la mía): lograr que sus alumnos pudieran «imaginar» objetos en tres dimensiones y ser capaces de visualizar —entre otros movimientos— sus posibles rotaciones y simetrías. Como se sentía impotente y frustrado, diseñó en su casa un cubo formado por pequeños «cubitos». Cada una de las caras del cubo grande (y por lo tanto, los nueve cuadraditos que la componen) tenía un color asignado: blanco, rojo, azul, naranja, amarillo y verde[4]. La particularidad del diseño es que cada cara externa y el «anillo central» pueden rotar independientemente del resto. Esto lo logró Rubik con un mecanismo interno que le permite pivotear y lograr múltiples configuraciones. Y así nació el *Rubik's Cube* o el Cubo Mágico.

www.elsolucionario.org



Rubik lo patentó en 1975 y recién en 1977 se empezó a comercializar en Hungría y en 1980 se expandió al mundo entero. Su estreno internacional se hizo en distintas ferias del juguete, en Londres, París, Nuremberg y Nueva York, y eso sucedió en un plazo de dos meses, entre enero y febrero de 1980. A partir de allí, su evolución fue imparable. Rubik se transformó en multimillonario en forma casi instantánea, y hay mucha gente que sostiene que el Cubo Mágico es hoy el «best seller» de los juguetes de la historia contemporánea.

Si usted le dedica un rato a buscar en YouTube, es posible encontrar más de 46 mil videos con instrucciones y soluciones de distinto tipo, y el video que figura en la página web http://www.youtube.com/watch?v=HsQIoPyfQzM ya tuvo más de ¡22 millones de visitas!

De hecho, ya se ha generado una cuestión de culto, con seguidores incondicionales, seminarios en distintas partes del mundo y hasta una página oficial para todos los fanáticos: http://www.rubiks.com/

El *Rubik's Cube* tiene, además, un lugar en el famoso Museo de Arte Moderno de Nueva York y fue *aceptado* por la Enciclopedia Inglesa de Oxford a los dos años de que se hubiera esparcido por el mundo.

El cubo

El cubo en sí mismo consiste de 27 «minicubos» con una distribución de 3 de alto por 3 de largo por 3 de ancho. En la práctica hay sólo 26 de estos pequeños «cubitos», ya que el que debería ocupar el lugar del centro, el único que no tiene una cara *exterior* o que se pueda ver desde afuera sin desarmarlo, está reemplazado por el mecanismo que es el que le permite al Cubo Mágico pivotear y hacer todos los movimientos. Ése fue el gran logro de Rubik.

Los 26 cubitos no son todos iguales: hay ocho «cubos esquinas», doce «cubos aristas» y los seis restantes, ocupan los lugares del centro de cada cara exterior y están fijos. Y acá empiezan algunos cálculos. Hay 40.320 maneras**[5]** de permutar los cubos que están en las esquinas. Siete pueden ser orientados**[6]** independientemente y el octavo depende de los otros siete. A su vez, cada uno de estos cubos puede rotarse en tres posiciones diferentes y producir un total de 3^7 = 2.187 posibles distribuciones.

Hay, además, 239.500.800 formas de intercambiar las aristas**[7]**. Y a esta conclusión quería llegar: el número *total* de posiciones a las que uno puede llegar rotando el cubo es de 43.252.003.274.489.856.000. Es decir, un poco más de 43 trillones, o lo que es lo mismo, el número 43 seguido de ¡18 ceros! Para tener una idea de lo *enorme* que es este número, piense que si usted pudiera probar un millón de configuraciones *por segundo*, tardaría casi un millón y medio de años para probarlas todas. Son muchas.

La mística

Varios millones de personas en el mundo se desafían para ver quién puede resolverlo en la menor cantidad de tiempo y en la menor cantidad de pasos. Pero ¿qué quiere decir *resolverlo*?

Llamemos «posición original» o «posición inicial» a la que presenta el cubo con cada una de las seis caras con un color que la distinga. Imagine que yo «desarreglo» esa configuración hasta llevarla a cualquier otra. Más allá de *jugar* a llevarlo al punto de partida, las preguntas que surgen son:

a) ¿Cuál es el número *mínimo* de movimientos necesarios para *garantizar* (o asegurar) que uno puede llevar el cubo desde *cualquier* posición**[8]**, hasta la original?

www.elsolucionario.org

b) ¿Cuál es el *tiempo* mínimo para hacerlo empezando con cualquier configuración[9]?

Son dos preguntas de distinto orden de dificultad. Contestar la primera significa elaborar una estrategia que sirva *siempre* para minimizar el número de rotaciones (o movimientos permitidos). La segunda pregunta involucra *aprender* la estrategia diseñada eventualmente por otro, y tener una destreza manual que la primera no requiere y ni siquiera considera.

Por supuesto que no se me escapa que la abrumadora mayoría de las personas se sentirían satisfechas con sólo resolver el cubo en una situación dada y listo. Es decir, enfrentados con una posición cualquiera, llevarlo a la posición inicial que tiene cada cara de un solo color.

Sin embargo, para los matemáticos, ingenieros, diseñadores de estrategias y algoritmos, contestar la primera pregunta resulta relevante.

Hasta febrero del año 2012 no hay una respuesta final, pero sí algunos datos parciales. Sígame porque es interesante. Se sabe que hay ciertas configuraciones para las que *inexorablemente* se necesitan 20 movimientos para llevarlos a la posición inicial o de base. ¿Qué dice esto? Dice que el día que se encuentre el *mínimo* tendrá que ser mayor o igual que 20. Recuerde que lo que se busca es encontrar el número mínimo de movimientos que resuelva *cualquier* posición. Si ya se sabe que hay algunas que requieren de 20, el día que se encuentre el mínimo, este mínimo tendrá que ser mayor o igual que 20 entonces.

Pero, por otro lado, y esto es lo que hace fascinante la búsqueda, Gene Coopman y Dan Kunkle, dos matemáticos de la Northeastern University en Illinois, Estados Unidos, demostraron que 26 movimientos son suficientes para garantizar que se pueda volver desde cualquier posición a la inicial. Por lo tanto, el mínimo que se busca está entre 20 y 26.

El hecho de que haya una *grieta* entre 20 y 26, aunque sea muy pequeña, no deja satisfecho al mundo de la matemática. Hasta que no se llegue a la situación en los que ambos coincidan, no se podrá decir que el problema está resuelto.

¿Y para qué podría servir?

Se han encontrado múltiples formas de resolver el Cubo Mágico y la mayoría, en forma independiente. La más popular durante un tiempo fue la desarrollada originalmente por David Singmaster, un matemático norteamericano profesor en Londres en la Universidad de South Bank, que publicó su solución en 1981 en el libro *Notes on Rubik's Magic Cube* (*Notas acerca del Cubo Mágico de Rubik*).

Sin embargo, fue Jessica Fridrich, también doctora en matemática, nacida en la ex Checoslovaquia y luego emigrada a Estados Unidos, quien diseñó la estrategia más reconocida mundialmente hasta hoy. Jessica es investigadora en la Universidad de Binghamton en el estado de Nueva York.

Lo interesante es que su trabajo es reconocido mundialmente no solamente por haber elaborado los algoritmos más eficientes que se conocen hasta hoy para resolver el Cubo Mágico, sino que ahora vive con otra obsesión que pretende resolver usando lo que aprendió en su experiencia con el *Rubik's Cube*: dada una fotografía cualquiera, ser capaz de recorrer el camino inverso y descubrir ¡cuál fue la cámara que se utilizó para obtener la foto! Parece una tarea imposible, pero en particular el FBI y otras agencias equivalentes quieren utilizar los resultados para descubrir a malhechores que se dedican a la trata de personas o a la pornografía infantil.

Por último

Hay varias competencias internacionales para ver quien «resuelve» el cubo más rápidamente. El primer campeonato mundial del que se tiene registro se hizo en Munich en 1981, y fue organizado por la Guía Guinness de Récords. A cada participante se le entregó un cubo que había sido «movido» de su posición inicial 40 veces y lubricado con vaselina y aceites que hicieran más fácil las rotaciones. El ganador logró volver el cubo a su posición original en 38 segundos. Pero eso pasó hace mucho tiempo. Cuando Jessica Fridrich ganó la competencia que se hizo en 1982 en la ex Checoslovaquia, lo hizo en un poco más de 23 segundos. Hoy, treinta años más tarde, ese record ha sido pulverizado múltiples veces: Feliks Zemdegs, de Australia, es el *rey* en vigencia: resolvió el «cubo» en ¡5,66 segundos! (en julio de 2011), en Melbourne.

www.elsolucionario.org

En definitiva, un prototipo inocente, diseñado por un profesor húngaro para ilustrar a sus alumnos, terminó transformándose en uno de los juguetes más vendidos de la historia, con millones de personas en el mundo cautivadas y atraídas con distintos niveles de fanatismo: algunos (supongo que la enorme mayoría) sólo para entretenerse, otros para investigar cómo resolver el problema general en una cantidad mínima de pasos, y otros tantos para exhibir su destreza manual.

En cualquiera de los casos, es un ejemplo más de la capacidad creativa del ser humano y un canto a la imaginación[10].

Reloj atómico y GPS

No sé si usted escuchó hablar alguna vez de un «reloj atómico». Lo más probable es que no. ¿Qué podrá tener un reloj para que se lo considere «atómico»? Bueno, el hecho es que la precisión de estos aparatos es verdaderamente imposible de creer. El nivel de tolerancia es el siguiente: a lo sumo pueden adelantar o retrasar no más de un segundo en los próximos… ¡60 millones de años! Un reloj atómico puede *dar* la hora con un nivel de exactitud de un nanosegundo, o sea, de una mil millonésima de segundo[11].

Como se advierte, son muy precisos, *casi* exactos. Eso sí, las preguntas que surgen inmediatamente son: ¿a quién podría interesarle tener uno de estos relojes?, ¿para qué podría necesitarlo usted?, ¿o yo?, ¿quiénes *tienen o usan* estos relojes?, ¿existen de verdad?

Sí, existen, y más aún: aunque usted no lo advierta, la existencia de esos relojes tiene una incidencia muy particular en nuestra vida cotidiana. Hace falta *ese* tipo de precisión para que funcione el sistema de navegación que provee el GPS.

Vayamos por partes. ¿Qué quiere decir GPS? En principio, GPS es la sigla (en inglés) con la que se conoce al sistema de posicionamiento global (*Global Positioning System*).

A lo largo de la historia, uno de los problemas a resolver con los que se enfrentó el ser humano fue el de poder determinar su posición en la Tierra: ¿dónde estoy? Mirar hacia el sol y las estrellas, buscar puntos de referencia o encontrar invariantes fueron motivo de largas búsquedas. Con la tecnología actual, el problema está resuelto para siempre. Sí, pero ¿cómo?

Acá necesito pedirle un favor: la/lo invito a que me siga en una pequeña cadena de argumentos. Si por cualquier motivo siente que se perdió, pare,

www.elsolucionario.org

retroceda y lea nuevamente hasta entender. Si yo pude entender, usted también. No se deje asustar porque el recorrido es sencillo, aunque no sea el que ni usted ni yo estamos acostumbrados a hacer habitualmente. Por eso el desafío, y créame que vale la pena. Acá va[12].

Voy a usar una idea del matemático portugués Nuno Crato, profesor de la Universidad Técnica de Lisboa. El crédito le corresponde *todo* a él. Supongamos que usted se perdió en algún lugar de la selva en donde hay distribuidas algunas poblaciones. Cada pueblo tiene una iglesia, y cada iglesia hace sonar sus campanas una vez por hora: a las 12, a la 1, a las 2, y así siempre… las 24 horas del día. Para seguir con las condiciones *ideales*, supongamos, además, que el sonido de las campanas viaja por el aire y llega a todas partes. Es decir, el tañido de las campanas se escucha en todos los lugares de esa zona.

Pero usted está perdido y no sabe dónde está. Lo bueno es que usted tiene un reloj. En ese reloj pulsera, usted ve que son las 3 de la tarde exactas. De pronto, escucha el sonido de una campana. Pero ya no son las 3. Pasaron 17 segundos en su reloj. Son las 3 horas y 17 segundos. Eso quiere decir que, desde alguna iglesia, el sonido tardó 17 segundos en llegar hasta usted. Como la velocidad del sonido (aproximada)[13] es de 340 metros por segundo, eso significa que el sonido recorrió (340 × 17) = 5.780 metros hasta llegar a usted. Casi 6 kilómetros. Si uno trazara una circunferencia de radio 5.780 metros con centro en esa iglesia, usted sabe que está parado en algún lugar de esa circunferencia.

Primer dato entonces: usted sabe que uno de los pueblos está a unos 6 kilómetros de distancia de su posición.

De pronto, usted escucha otra campana y se fija inmediatamente en su reloj. Esta vez, el sonido tardó 26 segundos en llegarle. Luego, haciendo el mismo cálculo, usted sabe que ese sonido recorrió (340 × 26) = 8.840 metros desde las 3 de la tarde. O sea, hay *otra* iglesia, de *otro* pueblo, que está a casi 9 kilómetros de donde está usted. Eso significa que si trazáramos otra circunferencia con centro en esa iglesia, de radio 8.840 metros, usted está en algún lugar de esa circunferencia.

En consecuencia, usted tiene que estar en alguno de los dos puntos en donde se cruzan esas circunferencias. No sabe en cuál de los dos (todavía), pero está

en alguno de los dos.

Por último, si usted pudiera escuchar el sonido de una tercera campana y repitiera el procedimiento anterior, eso le quitaría todas las dudas y diría en cuál de los dos puntos anteriores estaba parado.

Como usted ve, el procedimiento no es complicado. Me tuvo que conceder algunas licencias para llegar hasta acá, pero no fue difícil. Uno se lo puede imaginar sin problemas, siempre y cuando aceptemos que todo esto está sucediendo sobre una superficie plana, es decir, en dos dimensiones y todos los pueblos están sobre esa misma superficie.

Ni bien usted agrega una tercera dimensión (además del largo y el ancho, también la altura, ya que vivimos en un espacio tridimensional), entonces, los círculos se transforman en esferas y para resolver bien el problema haría falta una *cuarta iglesia*. Pero lo que me importa es trasladar la idea del funcionamiento y no las condiciones exactas, que ciertamente son distintas de las planteadas en el ejemplo de las iglesias y las campanas.

Ahora quiero volver al GPS. El sistema GPS consiste de tres elementos: una red de satélites, estaciones terrenas de control de esos satélites y receptores (que son los que usamos nosotros, como si fueran receptores de radio o de televisión).

En el caso del GPS, los que hacen el papel de las campanas de las iglesias, son los satélites. En realidad, son 24 satélites, que se conocen con el nombre de Navstar. Las órbitas que describen están ubicadas en seis planos y permiten garantizar que en cualquier lugar de la Tierra que usted se encuentre, podrá recibir las señales que emitan *por lo menos cuatro* de esos satélites[14].

El primero de ellos fue lanzado en 1978 y el último, el 26 de junio de 1993. Cada uno pesa unos 900 kilos, tiene el tamaño de un automóvil mediano y gira alrededor de la Tierra a 18.000 kilómetros de altura. La velocidad a la que avanzan les permite dar dos veces la vuelta al mundo por día. Los fabricó la empresa Rockwell International.

Cada satélite transmite una señal de radio digital en forma continua que indica dónde está el satélite en cada momento y *la hora* en la que está enviando la señal, con la precisión de un nanosegundo. Piense que un «nanosegundo» significa 0,000000001 de segundo, o sea, una «mil millonésima parte de un

www.elsolucionario.org

segundo». Como se ve, hace falta la precisión que solamente un reloj atómico puede ofrecer.

Ahora, volvamos a usted. ¿Qué necesita para poder conocer su posición sobre la Tierra? Necesita tener un aparato que pueda *leer e interpretar* las señales que envían esos satélites. Ese aparato es el que ahora viene incluido en varios teléfonos celulares inteligentes o en algunos autos o embarcaciones, y, por supuesto, imprescindible hoy para la aeronavegación.

Usted enciende su aparato receptor (que voy a llamar GPS) y quiere saber dónde está. Su GPS recibe las señales de por lo menos cuatro de los satélites. Ahora le pido que me siga con este razonamiento. Cada señal que su aparato recibe indica la *hora exacta* en la que fue emitida por cada satélite. Obviamente, como los satélites están en órbitas diferentes, están a distancias distintas del aparato que usted está usando. Por lo tanto, *tardan distintos tiempos* en llegar a usted.

Uno podría decir, «sí, pero ¿cuánta puede ser la diferencia?». MUCHA. Es que si bien las señales viajan a la velocidad de la luz (que es de 300 mil kilómetros por segundo), igualmente, *algo* tardan. Y cada señal tarda un tiempo diferente porque es emitida por un satélite diferente (como antes eran las campanas de las distintas iglesias). Esas DIFERENCIAS son las que permiten calcular su posición con un error de algunos metros. Por ejemplo, si la hora en la que el satélite emitió su señal es *una milésima de segundo* ***anterior*** a la hora de su GPS, entonces eso indica que usted está ubicado a 300 kilómetros del satélite[15].

Si dos personas están ubicadas aun a una cuadra de distancia, el tiempo que tarda la señal desde cada satélite es diferente, aunque «*infinitamente pequeño*». Ser capaz de poder detectar esa sutil diferencia, es lo que permite distinguir que uno está en un lugar y otra persona a 100 metros de distancia. Lo notable, entonces, es haber logrado *ese nivel de precisión,* que es medido en nanosegundos y, por lo tanto, detectables solamente por los relojes atómicos.

¿Por qué hacen falta las señales de *cuatro satélites?* Porque como ninguno de nosotros anda con un reloj atómico por la calle (son muy caros y muy escasos también), tres de los satélites aportan los datos que hacen falta para calcular la latitud y la longitud, pero el cuarto es el que funciona como factor corrector

de nuestro reloj. De esa forma evita que uno tenga que llevar en su muñeca un reloj de esas características. Alcanza con que su aparato de GPS tenga un buen reloj de cuarzo, que ahora son muy baratos.

Si usted tiene un receptor de GPS en su automóvil o en su teléfono celular, ahora sabe que ese aparatito sirve para recibir las señales de los (por lo menos) cuatro satélites y, de esa forma, le alcanza para determinar su posición con un margen de error de algunos metros. Para garantizar ese tipo de precisión, cada satélite está equipado con *cuatro* relojes atómicos que le permiten calcular el tiempo con una precisión que no existió jamás.

La posibilidad de haber accedido a este tipo de tecnología se produjo por la intervención de científicos de distintas áreas: ingenieros, físicos, matemáticos, entre otros. Cada uno de ellos fue pensando en cosas distintas, y posiblemente no imaginaron que su producción en ciencia básica tendría una aplicación tan determinante en nuestra vida cotidiana.

Por eso, cuando uno se tropieza con alguien que dice «¿y para qué podría querer uno tener *tanta* precisión?», es posible que la respuesta no sea inmediata, pero el tiempo y la evolución del hombre llevan a pensar que uno, a veces, está contestando preguntas futuras y no solamente las actuales. Y de eso se trata: de producir ciencia todos los días**[16]**.

www.elsolucionario.org

Pasión de multitudes

Uno de los problemas más apasionantes para abordar desde la matemática es el de predecir el comportamiento de una multitud de personas para poder modelarlo después. Es decir, se trata de generar modelos que permitan anticipar las reacciones de enormes grupos de individuos frente a distintos estímulos externos. ¿Cómo prepararse ante un incendio, inundaciones, un terremoto, un derrumbe, un atentado?

Sin embargo, no hace falta que sea necesariamente un accidente: una protesta masiva (como las concentraciones en Plaza de Mayo), un recital en la Avenida 9 de Julio, un festejo imponente (como el del Bicentenario y lo que generó Fuerza Bruta), una peregrinación a Luján (como las que se viven todos los años), un partido River y Boca, la presencia eventual de alguna figura prominente (Fidel Castro, el Papa en su momento) o el recuerdo no tan lejano del «cacerolazo» y «que se vayan todos». Pero también quiero incluir la invasión de un puente o un corte de ruta.

Todos estos son acontecimientos esporádicos, no necesariamente programados en la vida cotidiana, salvo el de las concentraciones por partidos de fútbol o en un hipódromo, por ejemplo. Pero hay otros que sí suceden a diario: hay una concurrencia masiva en las estaciones de trenes en las horas pico (en la Capital Federal, en Constitución u Once o en otras ciudades, en las estaciones ubicadas en Rosario o en La Plata), o en terminales de micros o colectivos (como en Retiro o Mar del Plata) o en las estaciones de subte en distintos momentos del día. Es decir, hay episodios espontáneos y otros recurrentes. ¿Qué hacer? ¿Cómo mejorar las condiciones de seguridad de la ciudadanía?

La ciencia en general y la matemática en particular tienen muchas cosas para aportar. Para abandonar un estadio de fútbol, en general la policía permite la

salida de los visitantes primero y luego se desconcentra la gente que sigue al equipo local. Pero ¿es verdaderamente ésa la mejor forma? ¿En qué estudios se basa esa determinación? ¿Cómo guiar a una multitud para producir una evacuación organizada?

Por otro lado, ¿qué hacer en un caso de incendio? ¿Qué pasaría si en un estadio estallara una bomba? O bien, ¿qué hacer si hay un corte de luz en una estación de subte en una hora pico? ¿Cómo evacuar el lugar[17]? Por supuesto, estos serían ejemplos de casos extremos. Pero más allá de la excepcionalidad que habría que atender, hay ejemplos cotidianos que merecen atención: cómo coordinar la concentración y desconcentración de grupos multitudinarios, cómo dirigirlos, hacia qué lugares, con qué frecuencia… o bien, ¿cómo hacer para minimizar el tiempo? ¿Qué estrategia usar para que haya suficiente transporte público para llegar y retornar?

Las razones por las que como humanos nos agrupamos son diversas, pero las grandes concentraciones de personas se podrían dividir en dos grandes grupos: estáticas (por ejemplo conciertos, recitales o estadios donde se juegan deportes populares) y dinámicas (marchas, protestas, maratones, peregrinaciones). Pero claro, las estáticas se pueden transformar en dinámicas cuando estalla un incendio o peleas o disparos o una amenaza de bomba, o, en definitiva, a la salida o evacuación de cualquiera de los lugares que motivaron la concentración. O sea, es esperable que la gente «salga» de una cancha o se desconcentre después de una manifestación en una plaza, pero lo que no resulta razonable es esperar que de pronto la invada el pánico o que sufra un ataque (policía, gases, represión, etc.). Y no me quiero olvidar de acontecimientos bien extremos como son los producidos por desastres naturales (inundaciones, terremotos, tsunamis, etc.).

En resumen, es virtualmente imposible pretender encontrar un patrón que sirva para todos las situaciones, pero lo que sí se puede hacer es agruparlos en casos que tengan características similares.

Los modelos matemáticos que se usan para entender la «dinámica de masas» incluyen la relación entre la densidad de gente que participa, la velocidad a la que camina, la tasa de variación del flujo de personas y al mismo tiempo lograr que la caminata sea cómoda. Se tienen en cuenta otros factores como el conocimiento del lugar por el que se transita, cómo se comunican instrucciones para guiar al público y el perfil demográfico. Por supuesto, hay

www.elsolucionario.org

factores externos a tener en cuenta y que también inciden en el desarrollo, como, por ejemplo, las condiciones del tiempo.

Los modelos tienen que incluir los riesgos que emergen en cualquier manifestación multitudinaria, como, por ejemplo, que alguien tropiece por problemas en el camino y contemplar que eso genera una reacción en cadena y afecta a mucha más gente que aquel que se cayó. Hay múltiples ejemplos en la historia de «desastres» (con víctimas fatales) que se generaron por la caída de una sola persona.

Por otro lado, si uno trata de delinear un sistema para el transporte público diseñando estaciones de trenes o subtes o de colectivos, el modelo tiene que incluir el volumen esperable con parámetros de máxima y mínima, pero también tratando de minimizar los riesgos, maximizar las prestaciones y optimizar el costo.

Las razones para que se produzca una gran confluencia de personas en un sitio pueden obedecer a distintas causas que hacen variar el modelo. La gente puede juntarse para *observar*, para *celebrar* o para *protestar*. Los estudios iniciales de los que se tiene registro son de fines del siglo XIX[18]. El advenimiento de computadoras hizo posible no solamente observar a las multitudes en el mundo real, sino que permitieron simular varios fenómenos que se producen y tratar de replicar los comportamientos colectivos en el mundo virtual. Estas conductas han sido estudiadas y modeladas con diferentes propósitos y se usan diferentes técnicas, que varían entre las que *no distinguen a los individuos que participan* hasta aquellas que representan a cada persona como si estuvieran controladas por reglas basadas en las leyes de la física o modelos de comportamiento. Las aplicaciones más conocidas fueron desarrolladas por la industria del entretenimiento (en Hollywood, por ejemplo), pero también para el entrenamiento de personal militar o de la policía, que requiere de la simulación de aspectos físicos de la dinámica de multitudes. Y todo esto sin desatender el aporte muy importante de la sociología. Pero, por supuesto, una cosa es modelar comportamientos en situaciones normales y otra en situaciones de emergencia.

Si usted vio la película *El Señor de los Anillos*[19], los «orcos» traían destrucción y muerte a su alrededor. Lo curioso es que la tecnología que se usa para generar hordas salvajes de estos «monstruos» es la misma que permite *imaginar comportamientos humanos* en casos extremos dentro de un

edificio (un incendio, por ejemplo). La coparticipación de ingenieros, arquitectos, físicos, desarrolladores de software y matemáticos permitió crear un proyecto animado que devino luego en una película. O varias. O en videojuegos. Pero ésta es la tecnología que se usa para predecir cómo nos desplazaríamos los humanos dentro de ciertos edificios. La idea es tratar no sólo de diseñar tales edificios con mayor eficiencia, sino también modelar qué sucedería en el caso de que se produjera una catástrofe, y tomar las precauciones necesarias.

Estos modelos son utilizados no sólo para interpretar y predecir el comportamiento humano, sino para diseñar mejores sistemas de seguridad de circuitos cerrados de televisión, para distribuir el tránsito de barcos en un puerto, para entender con mayor profundidad el estudio de las ruinas por parte de los arqueólogos y hasta para modelar ecosistemas enteros y establecer estrategias para manipular y ordenar la vida animal.

Las imágenes que aparecen en *El Señor de los Anillos* fueron generadas a través de un software que corría en una computadora (CGI)**[20]**. Pero lo notable es que este tipo de simulación daba vida a ¡medio millón de actores virtuales!, y cada uno actuaba independientemente y en forma bien creíble. La principal ejecutiva de la empresa que lo desarrolló**[21]**, Diane Holland, declaró a la revista *The Economist*: «Cada uno fue modelado de manera tal de que pudiera expresar sus propios deseos, necesidades y objetivos, y la habilidad de percibir el entorno que los rodeaba y les permitía reaccionar en consecuencia de una forma creíble. Cada “orco”, por ejemplo, podía operar en conjunto con otros, y dependiendo de la situación tomar la decisión de “atacar” o de “retroceder”. Esto, obviamente, produjo un efecto mucho más real que orquestar movimientos coreografiados de antemano».

El inconveniente mayor se produce porque este tipo de programas tienden a tratar a cada persona como si fueran partículas de un líquido, y, por lo tanto, las reacciones se asemejan a las de un fluido que se desliza por un caño. La gente que estudia la conducta de una multitud en el caso de un incendio, por ejemplo, sostiene que aparecen componentes irracionales muy fuertes, de manera tal que en lugar de buscar la salida más próxima, lo que se observa en la mayoría de los casos es que la gente tiende a regresar por donde vino, ir hacia atrás y tratar de salir por donde cada uno entró.

www.elsolucionario.org

Al mismo tiempo (y piense si esto no lo involucra a usted), cuando uno escucha una alarma que se supone que indica que hay llamas en un edificio o que se ha declarado una situación de emergencia, la mayoría de las personas reacciona pasivamente, casi «molesta», como si se predispusiera a esperar que haya alguna «evidencia» de que hay fuego, por ejemplo. Por lo tanto, no reaccionamos inmediatamente y desaprovechamos el tiempo que media entre el sonido de esa alarma y las llamas que llegan hasta nosotros.

Son famosos los casos de sirenas y alarmas en hoteles (por la noche) y en edificios (durante el día) anunciando un incendio, pero nuestra reacción como sociedad es de «fastidio» porque el ruido nos despertó o no nos deja dormir, o bien porque interrumpe lo que estábamos haciendo. Lo racional sería pensar así: «Yo salgo primero, y después me "enojo" porque fue una falsa alarma, en lugar de quedarme hasta convencerme de que no era "falsa" cuando quizás ya sea demasiado tarde». Sería algo así como que *no le creemos* a la alarma.

Como usted advierte, pretender modelar ese comportamiento se hace complicado, porque el programa que uno diseña tiende a funcionar esperando «racionalidad» y no lo contrario. Sin embargo, somos lo que somos y no los que nos gustaría ser. Si alguien pretende hacer un buen modelo de la realidad, no le queda más remedio que incorporar estos datos.

De acuerdo con un artículo publicado en la revista *Nature*, por Helbing, Farkas y Vicsek[22], una de las formas más desastrosas del comportamiento humano colectivo se produce cuando una multitud entra en pánico, que en general suele generar muertes por la propia gente que se pisa o se lastima en una estampida. Entre los casos conocidos y reportados figuran los incendios en edificios, apelotonamientos en la búsqueda de asientos o lugares privilegiados en las «discos», o cuando se abren las puertas para distribuir al público en un evento masivo. O los casos en estadios de fútbol, como el que sucedió en la Puerta 12 en la cancha de River el 23 de junio de 1968.

La ciencia busca maneras de prevenir los desbordes de las multitudes (la palabra «prevención» es clave acá), pero, por otro lado, la intención es modelar las potenciales reacciones del público para poder «guiar» y conducir. Los edificios, estadios, discotecas, hospitales, estaciones de trenes (por poner algunos ejemplos) variarán sus diseños con el tiempo, pero mientras tanto los actuales requieren de modificaciones para minimizar los riesgos.

En el mismo artículo de la revista *Nature* se hace una suerte de «decálogo» de los patrones más notorios que se producen cuando la gente entra en pánico:

a) La multitud se mueve o intenta moverse en forma considerablemente más rápido que lo normal.
b) Las personas empiezan a empujarse y en general las interacciones entre el público son cada vez más físicas.
c) Se generan «cuellos de botella» (cerca de las salidas o egresos) y el intento por avasallar a los que están más adelante resulta en la aplicación de la fuerza bruta: los más fuertes suelen querer imponer esa condición más salvaje.
d) Los que están más retrasados, ignorando lo que sucede más adelante, comienzan a ejercer presión. Como consecuencia, los apelotonamientos empiezan a devenir en condiciones asfixiantes para los que —justamente— estaban más adelante.
e) Esa presión, al tornarse insostenible, termina por derribar puertas y tumbar barreras metálicas con el consiguiente tendal de heridos y hasta de víctimas fatales.
f) Se produce un efecto contagio, en donde la masa tiende a hacer lo que hacen otros.
g) La gente empieza a gritar en forma anárquica y eso incrementa más el miedo y, por lo tanto, contribuye a generar más irracionalidad.
h) Las potenciales salidas de emergencia son ignoradas.

Tal es el nivel de irracionalidad que, por ejemplo, los bomberos en las ciudades más importantes del mundo conocen perfectamente cómo se expande el fuego, o por decirlo de otra manera, saben qué va a pasar con el fuego en casi todas las circunstancias, pero lo que es difícil conocer, y por tanto modelar, son las reacciones de la multitud. O sea, con la física del siglo XX y XXI se puede describir completamente el «comportamiento del fuego», pero lo que las distintas ramas de la ciencia no han podido resolver aún es «nuestro comportamiento».

Modelar tales situaciones involucra atender un numero enorme de variables, y si bien el desafío es ciclópeo, la ciencia lo aborda como una forma más de contribuir a que vivamos un poco mejor. Ah, y no me quiero terminar esta

www.elsolucionario.org

historia sin decir —una vez más— que «modelar» es también «hacer matemática».

Falsos positivos

A esta altura del siglo XXI, las estadísticas han tomado un lugar preponderante en nuestra sociedad. Desde que las computadoras personales (en sus variadísimas formas) han llegado a niveles de velocidad y precio impensables hace una década nada más, la recolección de datos (y su posterior análisis) permite descubrir patrones que uno no tenía idea de que existieran.

Es por eso que acceder a las herramientas que provee el estudio de las probabilidades se ha transformado en vital para el desarrollo y la alfabetización de una persona, y por eso creo que debiera empezar a enseñarse en la escuela primaria. En una época, alcanzaba con poder hacer razonamientos que tuvieran que ver con «una sencilla regla de tres simple» o con cálculos de proporciones. Hoy tenemos la capacidad de decodificar el genoma humano, estudiar y alterar las propiedades nanométricas de ciertas sustancias, predecir las condiciones climáticas, estimar la salinidad de los mares, operar a distancia usando robots, modificar la genética de algunos cultivos, hacer microcirugía tridimensional, diagnosticar y tratar enfermedades con medicina nuclear, transmitir datos con velocidades próximas a la de la luz, describir lo que sucede en Marte y ver en lugares en donde el ser humano jamás antes había tenido acceso. La lista —obviamente — podría seguir hasta hacerse virtualmente interminable.

Ahora bien: es necesario prepararse para poder extraer las conclusiones correctas y no dejarse impresionar por lo que uno *cree* o *sospecha* que tiene que pasar de acuerdo con nuestra *limitada* capacidad para intuir, especialmente cuando se trata de cuestiones que involucran a las probabilidades.

www.elsolucionario.org

Hay un ejemplo maravilloso que tiene que ver con la medicina. Léalo con total ingenuidad, y fíjese qué diría usted si tuviera que elaborar un juicio sobre el planteo. Por supuesto, es un ejemplo totalmente ficticio pero muy utilizado para exhibir lo que se llama «La Falacia del Fiscal[23]. Voy a presentar una versión[24]» de las múltiples conocidas, pero ciertamente una de las más atractivas.

Supongamos que se descubriera una nueva enfermedad, fatal para el ser humano. Supongamos, además, que es muy raro contraerla, pero si alguien la contrae, la probabilidad de sobrevivir es virtualmente nula. Lo bueno es que hay una forma de detectarla muy rápidamente. Un grupo de biólogos y médicos desarrolló un test que tiene un grado de certeza tal que, si a una persona le da *positivo,* eso significa que la probabilidad de que haya un error es *una en un millón.* De nuevo: si al realizar el test en búsqueda de esta enfermedad el resultado fuera positivo, la probabilidad de que esta persona *no tuviera* esa enfermedad sería de *una en 1.000.000.*

Ahora bien: usted llega a hacer una consulta con su médico, y frente a algunos síntomas que le reporta, él decide someterlo a la prueba para saber si entre los posibles causantes estuviera esta enfermedad. Le sacan sangre y cuando vuelve al hospital, el médico lo mira horrorizado y le dice: «Vea, el test para detectar la enfermedad de la que le hablé… ¡le acaba de dar *positivo*!».

Por supuesto, el médico —que conoce que el desenlace será inevitable una vez que se confirmen estos resultados— intenta calmarlo, pero no hay nada que hacer. Usted, mientras tanto piensa: «¿Habrá alguna posibilidad de que el resultado esté equivocado? ¿No habrá algún error? ¿Cuál es la probabilidad de que yo sea *justo* uno de los casos llamados *falsos positivos*?». Ambos —el médico y usted— saben bien que esa probabilidad es *bajísima:* ¡una en un millón!

Y acá le pido que me acepte una pausa en el relato. Yo lo conduje para que se convenciera de que las posibilidades de que quien resulte con un test positivo se salve son virtualmente *inexistentes.* Es casi imposible pedir más: un estudio que garantice un resultado cierto con un error de uno en un millón es el test «casi» perfecto.

Sin embargo, y hasta acá quería llegar, faltan algunos datos.

Cuando escribí que la enfermedad era de muy *rara* aparición, no especifiqué «cuán rara» era. Ahora lo voy a hacer, al incluir un hecho importante: la estimación de los científicos es que solamente ***una*** *de cada* ***mil millones*** *de personas la tiene.* Es decir, que si uno piensa que en el mundo somos alrededor de 7 mil millones de habitantes, y solamente uno de cada mil millones la padece, eso significa que hay sólo 7 personas que están enfermas. Obviamente, esto no es un dato menor.

Fíjese que ahora, si bien el test sigue siendo tan infalible como lo era al principio, si se lo hicieran a toda la población mundial de 7 mil millones de personas, habría 7.000 personas que darían positivo ¡aunque no tuvieran la enfermedad! Y esto sucede porque *una de cada millón* es un falso positivo. O sea, la abrumadora mayoría de las personas que dan positivo están sanas.

En ese caso usted podría ser una de esas 6.993 personas de las 7.000 que *no tienen la enfermedad*, pero a quienes el test le dio positivo. Es decir, que como se estima que hay solamente 7 personas que la padecen, ¡sólo uno de cada 1.000 habitantes a quienes les dio resultado positivo la tiene! O sea, ahora se redujo el caso a detectar si usted es (o no) una de *esas siete* personas.

Por lo tanto, que a usted le hubiera dado positivo el test no debería incomodarlo para nada. En todo caso, usted tiene 999 posibilidades a favor de que sea un *falso positivo.*

Como se ve, un análisis apresurado puede hacerle creer a usted (y también a su médico) de que si bien un test *parece* infalible (y de hecho es virtualmente así), eso no significa que usted esté en peligro ni de morir ni de tener una enfermedad terminal.

La idea de que el test fuera incorrecto en un solo caso en un millón termina siendo un engaño. Cuando uno pone todo en perspectiva y advierte que la enfermedad sólo afecta a una persona de cada mil millones, entonces lo que parecía conducir a un diagnóstico lapidario termina siendo —en la enorme mayoría de los casos— sólo un «falso positivo».

La utilización cuidadosa de los datos y el análisis por parte de matemáticos especialistas en el estudio de probabilidades y estadísticas, sirve para prevenir interpretaciones equivocadas y desatinos que son mucho más comunes de lo que uno advierte.

www.elsolucionario.org

Es por eso que se transforma en esencial ayudar a los médicos a no sacar conclusiones equivocadas al leer los datos, y prevenirlos frente a potenciales errores de diagnóstico. Para eso, ahora más que nunca antes, hace falta el trabajo en equipo, en donde la presencia de científicos de distintas ramas contribuya a echar luz donde parece no haberla.

Núm3ros

El 23 de enero del año 2005, hizo su debut televisivo en los Estados Unidos, en horario central, una serie que pocos sospecharon que tendría tanto éxito: *NUMB3RS*. Si bien aparecían todos los ingredientes que suelen atrapar a las grandes audiencias (crímenes, persecuciones policiales, incógnitas a develar, dramas pasionales, distintos niveles de corrupción y una larga lista de etcéteras), aparecía una componente totalmente inesperada: uno de los *héroes* era un matemático, Charles Eppes[25].

Pero Charles no estaba solo. En la ficción, era el hermano menor de Don, un agente de la FBI a quien ayudaba usando la matemática para descubrir, identificar y atrapar a los criminales. La serie culminó el 12 de marzo de 2010 y representó la primera aparición de un matemático en un lugar tan protagónico dentro de la televisión norteamericana, con la obvia incidencia que tiene en todo el mundo (occidental al menos).

Los capítulos exhibieron la potencialidad de distintas herramientas que provee la matemática para entender los *patrones* que aparecen en la vida real y, por otro lado, pusieron de manifiesto la potencia extraordinaria que permite su uso.

Lo que quiero hacer aquí es extraer un segmento de uno de los episodios[26] y proponerle a usted que haga de «detective» y luego analicemos juntos si sus conjeturas son válidas o son vulnerables. Acá va.

En una pequeña ciudad hay dos compañías de taxi que prestan servicio: los Amarillos y los Negros. Como la población no es muy importante, el número de vehículos tampoco lo es: los amarillos son 15 y los negros, 75. A los efectos del planteo del problema (que por supuesto involucra condiciones que

www.elsolucionario.org

uno considera «ideales»), podemos suponer que los 90 taxis estaban circulando en el momento en el que se produce el accidente que paso a relatar.

Un testigo *ve* el accidente y dice que un taxi *amarillo* fue el culpable. Ante un requerimiento de la policía, el testigo se somete a distintos tests para detectar cuán confiable es su visión, teniendo en cuenta las condiciones que rodearon el episodio (de noche, con poca visibilidad, con una garúa pertinaz), y cuando se le presentaron aleatoriamente taxis amarillos y negros, demostró que los pudo identificar correctamente 4 de 5 veces. O sea, en sólo una de cinco veces confundía uno amarillo con uno negro y viceversa.

Ahora, le pregunto: «Si *usted* estuviera investigando el caso, y tuviera los datos que figuran más arriba, ¿de qué color cree que era el taxi culpable?».

Como siempre, la/lo invito a que se detenga un rato, lea el planteo del problema y, sin apuro, piense qué le parece que es lo *más probable* que haya pasado: ¿fue amarillo o negro el taxi involucrado en el accidente?

Ahora sigo yo. La *tentación* es contestar: «Vea, si el testigo acertó en *cuatro* de *cinco* veces (el 80%) el color del taxi, y como dijo que él vio un taxi amarillo, entonces, es un 80% probable que el taxi FUERA de color amarillo. ¡Qué duda cabe!».

Bueno, caben *muchas* dudas. Y ahora le pido que me acompañe en este razonamiento. Analicemos juntos las distintas posibilidades. Es decir, voy a escribir todos los casos posibles (que en total son cuatro):

1) que el taxi fuera amarillo y que el testigo lo distinguiera correctamente.
2) que el taxi fuera amarillo y que el testigo se equivocara y dijera negro.
3) que el taxi fuera negro y que el testigo lo distinguiera correctamente.
4) que el taxi fuera negro y que el testigo se equivocara y dijera amarillo.

En el caso (1), como hay 15 taxis amarillos y el testigo distingue correctamente el 80% de los vehículos, eso quiere decir que acertaría en 12 casos (ya que el 80% de 15 es 12).

En el caso (2), el testigo se equivocaría diciendo *negro* cuando es *amarillo* en el 20% de las 15 veces que los viera, o sea, 3 veces.

En el caso (3), como hay 75 taxis *negros* y el testigo distingue correctamente el 80% de los vehículos, acertaría el 80% de 75 que es 60.

Y en el último caso, el (4), el testigo se equivocaría en el 20% de los 75, es decir, en 15 oportunidades, y diría que lo que vio es un taxi *amarillo* cuando en realidad es *negro*.

Resumo todo ahora.

Color Taxi	Número total	Acierta	Se equivoca
Amarillo	15	**12**	3
Negro	75	60	**15**

Es decir, el testigo diría amarillo en 27 oportunidades: 12 serían correctas, y 15 incorrectas. Luego, la *probabilidad* de que haya descripto la verdad cuando dijo que el taxi era amarillo se calcula dividiendo 12 por 27[27].

Y ahora, fíjese entonces que

> 12 / 27 = 0,44…

O sea, que el testigo ¡describe la realidad en un poco más del 44% de las veces! Es *más probable que el taxi sea negro que amarillo*[28].

Y a eso quería llegar. La tentación inicial era decir que, de acuerdo con los datos, el taxi tenía un 80% de posibilidades de ser amarillo, pero cuando uno estudia el caso en forma global, incluyendo *toda* la información que tiene, descubre que la conclusión *inicial* es equivocada.

Le propongo que lo piense así: si el testigo sólo hubiera tenido que atestiguar si en el accidente hubo involucrado un taxi, independientemente del color, entonces ¿qué cree que hubiera dicho? Teniendo en cuenta que circulando hay 90 taxis de los cuales 75 son negros, y que de acuerdo con los tests de

www.elsolucionario.org

«confiabilidad» esta persona acierta en un 80% de los casos, lo más probable es que su conclusión hubiera sido que el taxi era de color negro. Por lo tanto, *antes de que tenga que definir color*, las chances de que fuera amarillo eran muy bajas: 15 sobre 90, o sea un poco más del 16,6%.

No obstante, ni bien es invitado a definir el color, cuando dice haber visto un taxi amarillo, la probabilidad de que sea amarillo aumenta, por supuesto, *pero no tanto* como para superar el 50% y transformar en más probable el color amarillo sobre el negro.

Una vez más, la matemática sirve de *ayuda esencial* para esclarecer una situación que, de otra forma, terminaría incriminando a un inocente. Cada vez me parece más imperioso empezar a enseñar el estudio de probabilidades y estadística en los estamentos iniciales de las escuelas. Quizás en otra época no era tan necesario (y no estoy tan seguro), pero abordar temas de matemática combinatoria y su consecuente aplicación a la vida cotidiana empieza a transformarse en algo cada vez más imprescindible para la educación de una persona.

Falacia del jugador

El 18 de agosto del año 1913, en una de las ruletas del casino de Monte Carlo se produjo un episodio inusual: el color negro se repitió veintiséis veces seguidas. No es difícil imaginar lo que sucedió en ese período. La gente dejó de jugar en las otras mesas para tratar de espiar —aunque sea desde lejos— lo que consideraba un hecho histórico. De hecho, lo fue. No hay registros serios de que hubiera habido una tira de un solo color de mayor longitud en ningún otro casino en el mundo.

Antes de avanzar, me gustaría hacerle una pregunta: si usted hubiera estado allí en ese momento, y hubiera podido apostar, ¿a qué color hubiera jugado su dinero a medida que avanzaba la seguidilla? ¿Colorado o negro? Es decir, en vistas de la sucesión de números de color negro que se repetían, ¿hubiera intentado cortar la racha, jugando a colorado, o se hubiera mantenido en el negro?

Obviamente, no puedo escuchar su respuesta, pero lo que sí puedo es contarle algo que nos sucede a todos los humanos (bueno… a la mayoría de nosotros): la tentación es jugar al otro color (en este caso **colorado**) porque —uno supone— que por la ley de probabilidades «es hora de que salga el otro». Es decir, como uno sabe que la probabilidad de que aparezca cada color (colorado o negro) es la misma (*casi*[29] un 50% de las veces), la inclinación natural es asumir que la serie consecutiva de «números negros» tiene que detenerse. Algo así como «¡le toca salir a un número colorado ahora!»[30].

Y es aquí donde aparece lo que se llama «La Falacia del Jugador». Esa suposición de que «ahora tiene que salir colorado» es ciertamente un error. La ruleta no tiene memoria.

Lea esa frase una vez más: «La ruleta *no tiene memoria*».

www.elsolucionario.org

Cada tiro es INDEPENDIENTE del anterior. Nosotros, los que estamos afuera, llevamos la contabilidad y nos parece que como la probabilidad de que aparezca uno u otro color es la misma, entonces si salió lo que nosotros entendemos como una seguidilla de un color, debería compensarse con el otro color en algún momento. Y sobre todo, uno no quiere perdérselo porque sabe que en algún momento ¡tiene que suceder! La «racha» *tiene* que cambiar.

Bien: eso es lo que más espera el casino. En realidad, lamento informar que… ¡no tiene por qué pasar! Más aún: aunque *no* pase, eso no altera la igualdad en la probabilidad de uno y otro.

Me explico. Como decía antes, la ruleta (en este caso) no tiene memoria. Lo que pasó antes es irrelevante. Uno tiende a confundir dos hechos que ciertamente no son lo mismo, pero que uno les asigna el mismo valor de verdad. Fíjese qué le pasaría a usted. Cómo contestaría usted estas dos preguntas:

1) Suponga que usted entra en un casino, se acerca a una mesa de ruleta y le dicen que salieron 26 «números colorados» seguidos. Yo le pregunto: ¿cuál es la probabilidad de que salga colorado en el tiro siguiente?
2) Otra vez, usted entra en un casino, se acerca a una mesa de ruleta y yo le pregunto: ¿cuál es la probabilidad de que salgan 26 «números colorados» seguidos?

¿Se entiende la diferencia? La primera pregunta se contesta fácil: la probabilidad de que salga colorado es 18/37 = (aprox.) 0,4864, o sea, un poco más del 48%.

En cambio, la segunda pregunta, la probabilidad de que salgan 26 números colorados todos seguidos es un número muy chico: $(18 / 37)^{26}$ = (aprox.) 0,0000000073087029 (lo que es lo mismo que hacer circular la bolita en *¡mil millones de oportunidades y esperar que suceda siete veces!).* En fin, es muy difícil. No imposible, pero muy difícil.

Y eso es lo que hay que entender, que hay una diferencia esencial entre los dos problemas: anticipar que un evento pase 26 veces seguidas ANTES de que hubiera sucedido es una cosa, pero si uno *ya sabe* que salió colorado 25 veces y se pregunta cuál es la probabilidad de que suceda una vez más, es algo muy diferente.

Lo que se conoce como «La Falacia del Jugador» es que, a pesar de que las «tiradas» son independientes, los humanos tenemos la tentación de *no creerlo* y, por lo tanto, confiamos más en nuestra intuición y en el «pálpito». Los dueños de los casinos tienen recolectados los datos y por eso se pagan fortunas para traer más y más clientes. Y hasta acá, les ha ido muy bien, siendo una de las industrias que más éxito tiene y ha tenido en la historia del ser humano: el juego.

El hecho de que hubiera salido colorado o negro repetidamente *no altera la probabilidad* de que salga un color por sobre otro en la próxima jugada. Algo así como que *la ruleta no tiene memoria.* ¿Por qué sucede esto?

La respuesta la podemos buscar *juntos* después de los siguientes ejemplos.

Suponga que hay una familia que tiene dos niños. Uno acaba de nacer. El otro tiene 10 años. Es decir, uno es un bebé recién nacido y el otro ya está por terminar la escuela primaria. Acompáñeme a pensar lo siguiente: cuando el bebé cumpla un año, el mayor va a tener 11. Usted estará pensando: «Es una obviedad. Por supuesto que va a cumplir 11 si la diferencia entre los dos es de 10 años».

Y tiene razón. La diferencia entre los dos será SIEMPRE 10 años. Pero fíjese que hay otro número entre los dos que va cambiando a medida que van creciendo. Divida las dos edades entre sí. Es decir, la del mayor (11) dividida por la del menor (1). ¿Qué obtiene? El número 11. Al año siguiente, cuando el primogénito cumpla 12, el hermano menor cumplirá 2 años. El cociente entre las dos edades es ahora seis, ya que 12 dividido 2 es 6.

De la misma forma, cuando el mayor cumpla 13, el menor tendrá 3, pero el cociente ahora es un número más chico: 4,3333 (13 / 3 = 4,3333…). Y cuando el más grande cumpla 14, el menor tendrá 4, y el cociente ahora será 3,5 (ya que 14 / 4 = 3,5). Y así, uno puede seguir como se ve en esta tabla:

www.elsolucionario.org

Mayor	Menor	Diferencia	Cociente	Resultado aproximado
11	1	10	11 / 1	11
12	2	10	12 / 2	6
13	3	10	13 / 3	4,3333…
14	4	10	14 / 4	3,5
15	5	10	15 / 5	3
16	6	10	16 / 6	2,6666…
20	10	10	20 / 10	2
40	30	10	40 / 30	1,333…
80	70	10	80 / 70	1,14285…
100	90	10	100 / 90	1,1111…

Si bien la distancia (medida en años) es y será siempre la misma mientras ambos estén vivos, el cociente va cambiando a medida que avanza el tiempo. Ese numerito se va haciendo cada vez más chico, como se aprecia en la tabla adjunta. Es más: si usted presta atención a esa tabla con un poco más de cuidado, verá que el cociente es un número que se va aproximando a uno. Es decir, a medida que van creciendo los dos niños, el número no sólo se hace más pequeño, sino que cada vez está más cerca de uno.

Desde el punto de vista de las equivalencias, lo que está diciendo es que una persona de 80 años y otra de 90 tienen ya muchas similitudes. Es muy fácil descubrir quién es mayor en el caso de 12 y 2 años (respectivamente). Sin embargo, entre dos personas que se lleven 10 años pero de las cuales uno tiene 80 y el otro 90, es muchísimo más difícil.

Es decir, que del hecho de que ese cociente entre las edades sea un número que se acerque al número uno, lo que está diciendo es que cada vez, a medida que va pasando el tiempo, ¡cada vez son más parecidos!

De hecho, si yo le preguntara a usted: acá tiene dos números (llamémoslos a y b). ¿Son iguales? Una manera sería restar los dos números, y fijarse si el

resultado es cero. Sin embargo, otra forma equivalente, sería dividir uno por el otro, y en ese caso, el resultado debería ser… el número uno.

Y eso es muy importante. La forma más usual de decidir si dos cantidades son iguales o si están cerca en magnitud o si son equivalentes… es dividir una por otra y fijarse si uno obtiene un número cercano a uno. Cuanto más cerca de uno está, más parecidos son los números que uno está comparando[31].

Tomemos el caso de una moneda. Uno cree que porque la probabilidad de que salga cara o ceca es ½ (o 50%) para cada lado, esto significa que si uno tira la moneda 100 veces, entonces saldrá la mitad de veces cara y la otra mitad, ceca. O sea, uno querría que la diferencia entre caras y cecas sea cero, porque cree que habrá el mismo número.

Y eso no es así, ni tiene que serlo. Nadie garantiza (porque sería falso) que si uno tirara una moneda 10 veces saldrán tantas caras como cecas. Pero lo que sí va a suceder es que a medida que uno siga tirando la moneda al aire, la división entre el número de caras y de cecas se acercará al número 1, como pasaba en la tabla con las edades de los niños. Bien podría suceder que uno tirara una moneda un millón de veces y que saliera en 510.000 ocasiones cara y 490.000 veces ceca. La diferencia entre los dos casos es de ¡veinte mil!, pero el cociente (510.000 / 490.000) = (aprox.) 1,04.

Es decir, si tiráramos la moneda indefinidamente, la diferencia entre el número de caras y de secas puede ser enorme, e incluso ir agrandándose cada vez más, pero lo importante es que ¡el cociente debería tender a uno!

Y eso es lo que le interesa. Eso es lo que en matemática se llama «La Ley de los Grandes Números».

Por último, quiero retomar la pregunta que había quedado planteada después del ejemplo del casino de Monte Carlo en donde el color negro se repitió 26 veces seguidas en una de las mesas de ruleta: «¿Por qué no se altera la probabilidad de que salga el mismo color repetido tantas veces?».

Antes que siga yo, ¿se siente en condiciones de conjeturar una potencial respuesta después de lo que leyó hasta acá?

Pensémoslo juntos: es que uno ahora ya sabe que del hecho de que la probabilidad de que salga colorado o negro sea la misma ***no se desprende que***

www.elsolucionario.org

el número de colorados y negros sea el mismo. Puede salir *cien o mil veces seguidas el mismo color y eso no altera nada.* Lo que importa es saber que el *cociente* entre esos dos números se acercará a *uno* a medida que las jugadas se sigan sucediendo.

Por eso, si usted va a apostar o jugar en algún juego de azar, le conviene leer algo de probabilidades porque es muy posible que lo que usted cree que va a pasar, no sea lo que predice la ciencia.

Años bisiestos

El año 2012 (como tantos otros) llegó con 29 de febrero incluido. ¿Por qué? ¿Por qué sucede que hay febreros que tienen 29 días y otros que no? ¿Qué pasaría si no hubiera años *bisiestos*[32]? ¿Quién lo decidió? ¿Desde cuándo? Acá van algunas respuestas.

Hace no mucho tiempo leí que si bien la Tierra tiene muchísimos problemas, por lo menos garantiza una vuelta al Sol gratis todos los años. Ahora bien: uno podría pensar que ese giro (alrededor del Sol) lleva exactamente 365 días. Pero no es así. La vuelta completa tarda un poco más: 365,242190419… días. Por ahora, para no contabilizar *tantos* decimales, digamos 365,25 y después miramos juntos (usted y yo) qué nos estamos perdiendo con los datos que no incluimos. En este caso, serían 365 días y un cuarto, o sea, 365 días y 6 horas. Estas 6 horas que sobran, en cuatro años se transformarían en un día. Si no incluimos allí el 29 de febrero, quedaría como 1 de marzo cuando debería ser 29 de febrero. En 8 años, pasará a ser 2 de marzo, y así siguiendo. En 40 años en lugar de tener un 29 de febrero tendríamos el 10 de marzo, en 80 años sería un 20 de marzo… y un poco más de un siglo, ya nos adelantamos un mes.

Esto, dicho de esta forma, parece irrelevante. Sólo que terminaríamos teniendo veranos en junio e inviernos en enero (y al revés en el Hemisferio Norte). Las playas de Mar del Plata estarían invadidas de gente en agosto y los que esquían en Bariloche viajarían hacia allá en febrero. El día de la primavera se festejaría en abril y, si usted es religioso, las Pascuas caerían en octubre.

Pero más aún: el problema estaría en que esto iría variando con el tiempo, con lo cual en lugar de recordar cuándo un año es bisiesto, tendríamos que llevar la cuenta de cómo van sucediéndose las estaciones a medida que van pasando

www.elsolucionario.org

nuestras vidas y sería virtualmente imposible programar cualquiera tipo de actividad que tuviera alguna relación con las estaciones.

El emperador romano Julio César fue el primero que tomó nota de la situación y agregó un día al calendario empezando en el año 45 antes de Cristo. Se lo conoce con el nombre de Calendario Juliano y siguió en vigencia en algunas partes del mundo hasta el siglo XX. Pero fue un papa (sí, un papa) el que introdujo la modificación más esencial. Gregorio XII instituyó el día 29 de febrero cada cuatro años, y comenzó la era de los años bisiestos. Esto sucedió en 1582. Por supuesto, para no ser menos que Julio César —cuyo calendario se llama Juliano—, el nuevo calendario lleva el nombre de… Gregoriano. Cuando se produjo esa modificación, en marzo de 1582, el calendario le «erraba» a la fecha correcta por ¡10 días! Por lo tanto, y preste atención a esto, el día siguiente del 5 de octubre de 1582 *no fue* 6 de octubre, sino que pasó directamente al 15. ¿Se imagina ahora a *todo el planeta* poniéndose de acuerdo en algo semejante? Resulta hasta gracioso imaginar una reunión en las Naciones Unidas discutiendo sobre un cambio de este tipo.

Tampoco fue fácil en esa época, no crea. Por ejemplo, la iglesia ortodoxa rusa todavía usa el calendario juliano. Por ejemplo, la Navidad para ellos llega el 7 de enero. Cada siglo pierden un día. El grupo de personas que se guían por esas convenciones, están 13 días «atrás» de nosotros, y en el año 2100 llegarán a 14.

Pero como decía antes, agregar un 29 de febrero cada cuatro años no resuelve el problema en forma completa. Es que la Tierra no entiende de números «redondos». Sería muchísimo más fácil que efectivamente diera el giro alrededor del Sol en 365 días y un cuarto. Bastaría —cada tanto— con agregar un día más al calendario y listo. Pero no. En realidad, no tarda 365,25, sino que una «buena» aproximación es aceptar que le lleva 365,242190419 días.

Los efectos de tantos decimales serían solamente perceptibles si fuéramos a vivir decenas de miles de años. Presumo que para entonces, quienes nos sigan, se habrán ocupado de encontrar alguna otra solución que la que usamos ahora.

No obstante, si bien tantos decimales no son necesarios, sí hace falta considerar algunos más. Si uno acepta 365,2425 —con cuatro dígitos después

de la coma— entonces el 29 de febrero cada cuatro años no es suficiente. Es que *ese pequeño factor de 0,0025* obliga a *saltearse* algunos años bisiestos y compensar con otros.

Y eso hacemos: si bien todos los años que son múltiplos de *cuatro* son bisiestos (por eso 2004 fue bisiesto, igual que 2008, 2012, 2016, 2020, 2024… y así siguiendo) los que son múltiplos de 100, no. Y esto ya es un incordio de acordarse: los años 1700, 1800 y 1900 no fueron bisiestos.

Y cuando uno está dispuesto a decir que ya entendió todo, falta un dato. Para *seguir compensando* esos decimales que parecían tan intrascendentes, *¡hace falta que sí sean bisiestos los múltiplos de 400!* Es decir, el año 2000 que NO debió ser bisiesto, sin embargo lo fue porque es múltiplo de 400, y lo mismo sucederá con el año 2400.

En cada ciclo de 2.000 años hay 485 años bisiestos y, por lo tanto, 485 días que caen en 29 de febrero. Esos son los que hemos agregado y reconocido hasta acá.

En fin. Los números decimales que parecían tan irrelevantes (y de hecho, a partir del cuarto dígito lo son[33]), tienen una incidencia muy singular en nuestra vida cotidiana. Si no hubiera años bisiestos, las estaciones empezarían a correrse (a baja velocidad[34], pero se correrían) y cualquier planificación que dependiera de ellas sería una tortura.

La última pregunta que la/lo invito a pensar es la siguiente: un niño que nació el 29 de febrero de 2004, ¿cuántos años cumplió el pasado 29 de febrero de 2012? ¿Dos u ocho?

www.elsolucionario.org

Diputados y senadores

El próximo caso es *especial* para diputados, senadores, funcionarios públicos, gente que toma decisiones. Les pido que lean con atención lo que sigue y verán como en algún momento de sus vidas se tropezaron (o se tropezarán) con un problema parecido. Acá va.

Una compañía maderera (y papelera) está muy interesada (obviamente) en talar árboles en un bosque del noroeste argentino. El área está repleta de pinos, a tal punto que después del último relevamiento de la zona se sabe que el 99% de los árboles de esa región son justamente pinos: un lugar ideal para predar. A la compañía maderera en cuestión *únicamente* le interesan los pinos y ya están listos para firmar un contrato con los dueños de la tierra.

Los residentes de la zona y las organizaciones sociales sabiendo lo que está por pasar, luchan para que no se tale ningún árbol. Sin embargo, como buenos conocedores de que eso no habría de prosperar (por la cantidad de dinero que hay en juego) están dispuestos a hacer algunas concesiones. Para eso, presionan a los funcionarios públicos que tienen la obligación de regular esa área y logran que se incorpore al contrato una cláusula que impone algunas restricciones.

En un gesto que resulta curioso, es la propia maderera la que envía el texto de la cláusula que termina siendo aceptado y, más aún, votado por la abrumadora mayoría de los legisladores, quienes encerrados entre la oferta de la empresa y el reclamo popular encontraron finalmente una vía de solución.

Así las cosas, le pido (a usted) que ahora lea con cuidado el siguiente texto:

> Se permite a la maderera «tal y cual» proceder a la poda de pinos *únicamente*. Habida cuenta de que a la firma del contrato, el número de pinos del área representa el 99% del total de árboles, la empresa tendrá 60 días para realizar su

> tarea, y al finalizar la poda, la cantidad de pinos remanentes tendrán que representar el 90% del total de árboles de la zona en discusión.

Con esta cláusula, todo el mundo quedó satisfecho. Los pobladores y referentes sociales, si bien no habían logrado que la región resultara *intocable* —como pugnaron en un principio— entendieron que reducir de un 99% a un 90% no parecía un episodio tan grave. Y lo mismo sucedió entre los funcionarios que la terminaron aprobando *casi* por unanimidad. Ni que hablar de la maderera.

¿Qué pasó cuando terminó la poda? Pasó que se armó un escándalo increíble, con tomas de ruta, quemas de neumáticos, funcionarios acusados de corrupción, escraches públicos, solicitadas en los diarios denunciando atropellos/abusos y violaciones al contrato firmado a los dueños de la compañía. En definitiva, un desastre.

¿Por qué? ¿Qué pasó? ¿No era que el contrato estipulaba que al finalizar la poda los pinos tenían que representar el 90% del total de árboles de la zona? ¿Cuántos pinos terminó llevándose la compañía? Si el contrato se respetó, ¿qué fue lo que funcionó mal?

Antes de sacar conclusiones, le propongo que hagamos algunas cuentas y después revisemos quién tiene/tenía razón.

Caso testigo

Supongamos que en el bosque hubiera 100 árboles nada más. Entonces, como se sabe que el 99% son pinos, eso quiere decir que 99 de los 100 árboles *son* pinos. En todo caso, solamente *uno* es un «no pino» (por ponerle algún nombre[35]). Lo que queremos hacer es calcular cuántos pinos se llevó la maderera.

Lo que sabemos seguro es que el único árbol que *no era un pino* tiene que estar entre los que *no se llevó la compañía.* Pero (y acá le pido que me preste atención) la diferencia está en que mientras ese único árbol representaba el 1% del total de árboles antes de la poda, una vez finalizada, ese único árbol, ahora tiene que representar el 10% de los que quedaron.

www.elsolucionario.org

¿Y cuál tiene que ser el total de árboles que quedaron para que *un* árbol constituya el 10%? (¿Quiere pensar la respuesta usted?). ¿Cuántos árboles tiene que haber para que 1 sea el 10% del total?

Sí, la respuesta que usted pensó es correcta: *uno* es el 10% de 10. O sea, luego de la poda, *el total de árboles se redujo a ¡diez!* Por lo tanto, la compañía maderera se llevó… ¡90 pinos! de los 99 que había al principio.

O sea, *¡nadie violó ningún contrato!* Lo que pasó es que haberles permitido podar los pinos que había (99) hasta reducir la cantidad de manera tal que después de la poda, el número de pinos represente el 90% del total de árboles que quedaron, le permitió a la empresa llevarse 90 de los 99 pinos que había. ¡Y nadie puede reclamar nada! O mejor dicho, sí, hay mucho para reclamar: ¡hay que saber hacer las cuentas antes! Hay que saber leer las cláusulas que involucran porcentajes bien explícitos, pues una sociedad no bien educada puede —en principio— ignorar el daño al que se está sometiendo.

Las compañías (madereras o no) no ignoran esto. Y ya no me estoy refiriendo a la letra *chica* de un convenio. No. Me refiero a algo mucho más evidente y flagrante: es la propia letra del contrato la que fue firmada.

Está claro que el ejemplo[36] es ficticio. La subnota adjunta explica que lo mismo sucedería en el caso general, cuando el total de árboles no fuera 100: vale siempre, en la medida en que se respeten los porcentajes indicados.

Pero lo que *no nos debería pasar* es creer que porque —en apariencia— reducir de un 99% a un 90% no es tan grave, sin embargo, resulta ser un *desastre*, que es lo que se quería evitar. No hubo engaño: hubo ignorancia. Y a eso sí que no tenemos derecho.

Nota

Si T es el total de árboles, P es el total de pinos, NP el total de «no pinos» y PC será el total de pinos cortados por la compañía, entonces, por un lado:

> “
>
> T = P + NP

Por otro lado,

> NP = (1 / 100) T (*)

(o sea, los «no pinos» representan el 1% del total).

Al finalizar la poda, los NP tienen que representar el 10% del «nuevo» total. Es decir:

> NP = (10 / 100) (T – PC) (**)

Usando (*) y (**), se deduce que

> (1 / 100) T = (10 / 100) (T – PC)

Y de acá se concluye que:

> T = 10T – 10 PC

O sea:

> **PC = (9/10) T**

Moraleja: *¡Los pinos cortados representan el 90% del total de árboles que había!*

www.elsolucionario.org

Almanaque permanente

¿Cuántas veces le pasó que quiso calcular qué día de la semana se festejaría la llegada del Año Nuevo y no tenía un almanaque a mano? ¿O el día de su cumpleaños o cualquier otra fecha que le resulte significativa?

Por supuesto, si uno tiene acceso a un calendario, el problema es irrelevante. Pero eso no siempre sucede. ¿Qué hacer? ¿Hay alguna forma de solucionarlo *mentalmente?*

Hay muchísima literatura escrita sobre el tema, pero hace algunos años, uno de los mejores (y más prolíficos) matemáticos del mundo, el inglés John Conway, nacido en Liverpool en 1937, diseñó un algoritmo precioso que permite calcular en qué día de la semana sucederá (o sucedió) algún evento. Conway lo hizo público en 1982 y lo denominó «Doomsday Rule» o «Doomsday Algorithm[37]».

Para contar de qué se trata el procedimiento, voy a necesitar de usted (y de su generosidad) para que me acompañe en algunos razonamientos.

Quiero empezar por una «casi» obviedad: por ejemplo, si yo le dijera que el 9 de abril del año 2012 va a ser un día lunes, y le preguntara qué día de la semana será el 11 o el 16 del mismo mes, o incluso el 27 de abril, creo que usted convendrá conmigo en que el cálculo que hay que hacer es *relativamente* sencillo.

El 11 de abril, dos días más tarde, será un miércoles. El 16 será un sábado (basta con contar cinco días desde el lunes 9).

Una cuenta sencilla revela que el 27 del mismo mes será un viernes. ¿Por qué? Es que basta con sumar primero *siete* días al 11 de abril (y obtener el 18) y el día de la semana (miércoles) no cambia. Sumando otra vez *siete* ahora

estamos en el 25 (de abril), y por supuesto, el día de la semana sigue siendo miércoles. Por lo tanto, el día 27 (que es el que buscábamos) es *dos días más tarde que el miércoles 25*, y por lo tanto, resulta ser un viernes.

Es decir, basta con saber (por ejemplo) que el 11 de abril es un miércoles para concluir casi instantáneamente que el 27 será un viernes.

Cada vez que uno suma *siete (o un múltiplo cualquiera de siete)* a cualquier día del año, el día de la semana se repite. Y lo mismo si uno va hacia atrás, saltando en múltiplos de siete.

Claro está que si uno tuviera que estimar —usando el mismo método qué día de la semana será el 30 de septiembre— la cantidad de veces que habría que sumar *siete,* exceden la paciencia y el sentido común de cualquier persona. Más aún: es preferible procurarse un almanaque del año 2012. O sea, algunas semanas hacia adelante (o hacia atrás) resulta admisible, pero después, ya no.

Lo que hizo Conway[38] es detectar que cada año calendario tiene un «*día de la semana que llamó* ***clave***».

Sígame con este argumento. Usando la notación convencional para las fechas dentro de un año, Conway advirtió que el 4/4, 6/6, 8/8, 10/10 y 12/12 caen *todos* el mismo día de la semana sin importar el año del que se trate. Todos estos días involucran días y meses *pares.*

O sea, el 4 de abril, el 6 de junio, el 8 de agosto, el 10 de octubre y el 12 de diciembre fueron todos días lunes durante el año 2011, y serán todos días miércoles en el año 2012. Y lo mismo sucederá 100 años para adelante o sucedió 100 años hacia atrás: todos ellos coincidirán en el día de la semana.

Pero allí no termina la observación de Conway. Lo mismo sucede para el 5/9 y el 9/5, el 7/11 y el 11/7, o sea, en donde ahora aparecen involucrados los números impares también.

Es decir, el 5 de septiembre, el 9 de mayo, el 7 de noviembre y el 11 de julio caen *siempre* el mismo día de la semana… y para todos ellos es el mismo día que sucedía con los números pares como ya escribí.

Por lo tanto si en un determinado año el 4 de abril (4/4) es un jueves, entonces

www.elsolucionario.org

el 6/6, 8/8, 10/10, 12/12, 9/5, 5/9, 11/7 y 7/11,

serán *todos jueves* también.

Y una curiosidad más: el último día de febrero, sea éste 28 o 29 en el caso de los años bisiestos, también cae en el mismo día que todos los anteriores, que denominamos *día clave*.

Por ejemplo, en el año 2012, el día clave será un miércoles. Si yo le preguntara ahora qué día de la semana fue el 9 de julio del año 2012, bastará con saber que el 11/7 (11 de julio) cayó miércoles para saber que el 9 será un lunes (dos días antes), y si la idea es saber qué día será (o fue[39]) 31 de diciembre, basta con recordar que el 12/12 (12 de diciembre) será miércoles también, por lo que sumando *dos veces siete*, se descubre que el 26/12 será miércoles y, por lo tanto, el último día del año 2012 será un lunes.

La moraleja de todo esto es que ahora usted tiene un método sencillo para *estimar* qué día de la semana caerá cualquier día de cualquier año. Le bastará con saber *cuál es el día clave de ese año.* Y con ese dato solamente, usted podrá *deducir* qué día de la semana son el 4/4, 6/6, 8/8, 10/10, 12/12, 9/5, 5/9, 11/7 y 7/11. Y también el 28 o 29 de febrero de ese año. Y con cualquiera de esos días, le será *fácil* llegar hasta cualquier otra fecha del año que le interesa.

Los argumentos que usa Conway para descubrir el día clave de cada año son un poco más sofisticados y ameritan una exposición un poco más profunda. Sin embargo, la lista que sigue le permite sacar algunas conclusiones respecto a cuál fue tal día en todos los años de este siglo y los que vendrán en la próxima década:

2000 Martes	2004 Domingo	2008 Viernes
2001 Miércoles	2005 Lunes	2009 Sábado
2002 Jueves	2006 Martes	2010 Domingo
2003 Viernes	2007 Miércoles	2011 Lunes
2012 Miércoles	2015 Sábado	2018 Miércoles
2013 Jueves	2016 Lunes	2019 Jueves
2014 Viernes	2017 Martes	2020 Sábado

Si uno lee la lista con cuidado, advierte el patrón para estimar el día clave: todos los años el día clave se «corre» en uno, salvo en los años bisiestos en donde salta dos[40]. Por ejemplo, durante el año 2011 es un lunes, en cambio en 2012 (que es bisiesto) pasa a ser un miércoles[41].

Para terminar: tengo claro que es más rápido, cómodo y eficiente tener un almanaque en la mano (o en la computadora), pero como eso no sucede en *todo* momento en nuestra vida cotidiana, lo que antecede sirve para poder —mentalmente— resolver un problema nimio, pero útil. Y por supuesto, esto también es «hacer» matemática.

www.elsolucionario.org

1949

Enero

Lu	Ma	Mi	Ju	Vi	Sá	Do
					1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30
31						

Febrero

Lu	Ma	Mi	Ju	Vi	Sá	Do
	1	2	3	4	5	6
	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28					

Marzo

Lu	Ma	Mi	Ju	Vi	Sá	Do
	1	2	3	4	5	6
	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31		

Abril

Lu	Ma	Mi	Ju	Vi	Sá	Do
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	

Mayo

Lu	Ma	Mi	Ju	Vi	Sá	Do
2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29
30	31					

Junio

Lu	Ma	Mi	Ju	Vi	Sá	Do
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30			

Julio

Lu	Ma	Mi	Ju	Vi	Sá	Do
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31

Agosto

Lu	Ma	Mi	Ju	Vi	Sá	Do
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

Septiembre

Lu	Ma	Mi	Ju	Vi	Sá	Do
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30		

Octubre

Lu	Ma	Mi	Ju	Vi	Sá	Do
					1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30
31						

Noviembre

Lu	Ma	Mi	Ju	Vi	Sá	Do
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30				

Diciembre

Lu	Ma	Mi	Ju	Vi	Sá	Do
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	

2013

Enero

Lu	Ma	Mi	Ju	Vi	Sá	Do
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31			

Febrero

Lu	Ma	Mi	Ju	Vi	Sá	Do
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28			

Marzo

Lu	Ma	Mi	Ju	Vi	Sá	Do
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31

Abril

Lu	Ma	Mi	Ju	Vi	Sá	Do
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30					

Mayo

Lu	Ma	Mi	Ju	Vi	Sá	Do
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31		

Junio

Lu	Ma	Mi	Ju	Vi	Sá	Do
					1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30

Julio

Lu	Ma	Mi	Ju	Vi	Sá	Do
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

Agosto

Lu	Ma	Mi	Ju	Vi	Sá	Do
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	

Septiembre

Lu	Ma	Mi	Ju	Vi	Sá	Do
						1
2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29
30						

Octubre

Lu	Ma	Mi	Ju	Vi	Sá	Do
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31			

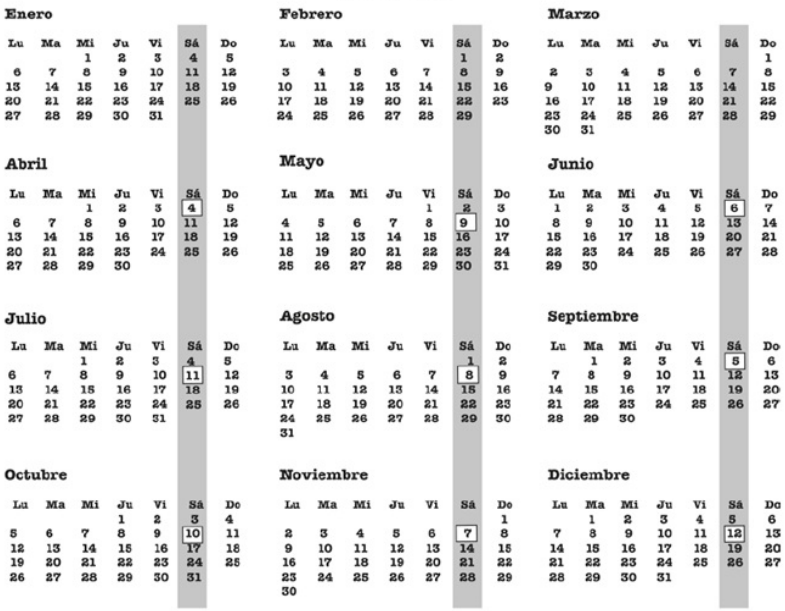
Noviembre

Lu	Ma	Mi	Ju	Vi	Sá	Do
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	

Diciembre

Lu	Ma	Mi	Ju	Vi	Sá	Do
						1
2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29
30	31					

2020


Enero
Lu Ma Mi Ju Vi Sá Do
1 2 3 4 5
6 7 8 9 10 11 12
13 14 15 16 17 18 19
20 21 22 23 24 25 26
27 28 29 30 31
Febrero
Lu Ma Mi Ju Vi Sá Do
1 2
3 4 5 6 7 8 9
10 11 12 13 14 15 16
17 18 19 20 21 22 23
24 25 26 27 28 29
Marzo
Lu Ma Mi Ju Vi Sá Do
1
2 3 4 5 6 7 8
9 10 11 12 13 14 15
16 17 18 19 20 21 22
23 24 25 26 27 28 29
30 31
Abril
Lu Ma Mi Ju Vi Sá Do
1 2 3 4 5
6 7 8 9 10 11 12
13 14 15 16 17 18 19
20 21 22 23 24 25 26
27 28 29 30
Mayo
Lu Ma Mi Ju Vi Sá Do
1 2 3
4 5 6 7 8 9 10
11 12 13 14 15 16 17
18 19 20 21 22 23 24
25 26 27 28 29 30 31
Junio
Lu Ma Mi Ju Vi Sá Do
1 2 3 4 5 6 7
8 9 10 11 12 13 14
15 16 17 18 19 20 21
22 23 24 25 26 27 28
29 30
Julio
Lu Ma Mi Ju Vi Sá Do
1 2 3 4 5
6 7 8 9 10 11 12
13 14 15 16 17 18 19
20 21 22 23 24 25 26
27 28 29 30 31
Agosto
Lu Ma Mi Ju Vi Sá Do
1 2
3 4 5 6 7 8 9
10 11 12 13 14 15 16
17 18 19 20 21 22 23
24 25 26 27 28 29 30
31
Septiembre
Lu Ma Mi Ju Vi Sá Do
1 2 3 4 5 6
7 8 9 10 11 12 13
14 15 16 17 18 19 20
21 22 23 24 25 26 27
28 29 30
Octubre
Lu Ma Mi Ju Vi Sá Do
1 2 3 4
5 6 7 8 9 10 11
12 13 14 15 16 17 18
19 20 21 22 23 24 25
26 27 28 29 30 31
Noviembre
Lu Ma Mi Ju Vi Sá Do
1
2 3 4 5 6 7 8
9 10 11 12 13 14 15
16 17 18 19 20 21 22
23 24 25 26 27 28 29
30
Diciembre
Lu Ma Mi Ju Vi Sá Do
1 2 3 4 5 6
7 8 9 10 11 12 13
14 15 16 17 18 19 20
21 22 23 24 25 26 27
28 29 30 31

www.elsolucionario.org

Cerraduras y combinaciones

Si se tiene una cerradura con cuatro lugares para elegir números (o dígitos, para ser más precisos), y se pregunta:

a) ¿Cuán fácil o difícil es «acertar» el número que la abre?
b) ¿Y si no se pueden repetir números?

Respuesta

Si uno puede *repetir* cualquier número, entonces hay 10.000 posibilidades: 10 x 10 x 10 x 10. Es que en cualquiera de los cuatro lugares puede ir cualquiera de los diez dígitos, sin restricciones. Por eso hay 10.000.

En cambio, si *no* se pueden repetir los dígitos, entonces hay *diez posibilidades* para el primer lugar, *nueve* para el segundo, *ocho* para el tercero y *siete* para el cuarto y último lugar. De esta forma, para cada una de las diez que se pueden elegir en el primer lugar, hay nueve para el segundo, ocho para el tercero y siete para el cuarto, lo que implica que el número total de posibilidades se calcula así:

> “
> 10 x 9 x 8 x 7 = 5.040 posibilidades

Es interesante notar, entonces, la diferencia que hay si uno permite repetir o si no: es casi el doble[42].

Promedios y estimaciones

La matemática interviene en múltiples situaciones de nuestra vida cotidiana, muchísimas más de las que alcanzamos a tener conciencia. Es decir, hay momentos en los que nos es virtualmente transparente. No es mi propósito enumerarlas aquí (tampoco se si sabría hacer una lista), pero lo que sí me interesa es mostrar cómo la utilizamos en un tema muy específico: las estimaciones.

Es decir: uno *se pasa la vida* ***estimando***. Estima cuando decide cuánto tiempo necesita para levantarse a la mañana y tiene que fijar el horario del despertador, estima cuando decide si no le queda más remedio que tomar un taxi porque con el colectivo no llega, estima cuando está a punto de cruzar una calle y tiene que calcular la velocidad del auto que advierte a la distancia (y es dable esperar que en esta «carrera» gane siempre usted, porque si gana el auto…), estima cuando decide cuánto dinero necesita llevar en el bolsillo (o la cartera) para poder pasar el día antes de volver a su casa, estima las calorías de un producto (antes de comerlo o de comprarlo), estima cuando tiene que decidir cuánto comprar de carne para hacer un asado…, usted elija lo que le resulte más familiar.

Sin embargo, parte de esas estimaciones es que uno se entrena para detectar (y desechar) «imposibles». Es decir, si yo le dijera que la temperatura de hoy va a llegar a los 90 grados (sí, *noventa* grados), usted sabe que esa estimación es incorrecta. Si yo le dijera que compre 140 kilos de carne para que coman seis personas, también. O si le afirmara que en el estadio de River entran solamente mil personas o que el parque automotriz de la República Argentina es de cinco mil autos. Estos ejemplos le *llaman* la atención porque usted reconoce inmediatamente que las estimaciones son incorrectas.

www.elsolucionario.org

Sin embargo, si yo le preguntara cuántos afinadores de piano hay en Córdoba o cuántas montañas hay en la cordillera de los Andes o cuántos alumnos cursan sus estudios secundarios en el país en donde usted vive, allí sus convicciones tambalearían un poco más, porque son estimaciones que uno no está acostumbrado a hacer. Por supuesto, no se espera de usted una respuesta *exacta* (que de todas formas es muy probable que nadie pueda dar con precisión porque son datos que van variando día a día en algunos casos), pero sí se supone que debería poder encontrar *una buena aproximación.*

Lo que nadie querría es responder que hay diez afinadores de piano cuando hay 400, pero tampoco decir 14.000 cuando son 200. No querría contestar que hay 15 millones de alumnos en colegios secundarios cuando hay 2 millones, pero tampoco decir 100.000. O sea, se trata de poder aprender a *intuir, a estimar, a «encerrar» entre un par de «topes» o «cotas» (superior e inferior)* y, sobre todo, a detectar cuándo usted se tropieza con una respuesta que entiende *posible* versus otra que invita a pensar: «no puede ser». En todo caso, uno quiere descubrir si en alguna parte «alguien está diciendo un disparate». Como cuando se lee en un contrato *todo* lo que a uno le conviene, pero se olvida leer *la letra chica* en donde está todo eso que uno no previó.

El problema que sigue es ciertamente muy sencillo. Es muy posible que le resulte muy fácil, y está bien que así sea, aunque si eso no ocurre tampoco es grave. Nunca es grave que uno no pueda resolver un problema. En todo caso, el valor está en la voluntad de pensarlo, en *disfrutar* al pensarlo.

Pero lo que me importa en este caso es invitarla/lo a *dar una respuesta estimada*, basada en su intuición y su conocimiento, en argumentos que *no necesariamente signifiquen* «tener que hacer todas las cuentas» para comprobarlos (aunque yo las voy a hacer después). Acá va.

Suponga que cuatro personas (digamos A, B, C y D) se presentaron a rendir una prueba para acceder a un trabajo. El objetivo era contestar 100 preguntas. Todas tenían el mismo valor: *un* punto por respuesta correcta[43].

Una vez que los cuatro rindieron el examen, los organizadores calcularon el promedio de los puntos obtenidos y descubrieron que fue de 75 puntos, y escribieron las siguientes observaciones:

a) El candidato A se equivocó (o no contestó) en dos preguntas solamente.

b) El B, completó correctamente 96.
c) En cambio el C, contestó seis preguntas en forma errónea.

Ahora tengo un par de preguntas:

a) ¿Cómo estima usted que le fue a D en el test?
b) Para ser más precisos, ¿qué puntaje obtuvo D?

No hace falta que lea lo que sigue. Si le interesó el problema, deténgase a pensarlo con tranquilidad y deduzca las respuestas en soledad. El resto es irrelevante.

Solución

Antes de contestar, quiero sugerirle que se pregunte lo siguiente: ¿qué le dice su intuición que pasó? Quiero decir, ¿cómo cree que le fue a D: bien, muy bien, mal, muy mal?

No haga las cuentas todavía. Tómese un tiempo para pensar.

Al leer (y deducir) los puntajes de A, B y C, uno detecta que a ellos les fue muy bien.

Por un lado, A contestó bien 98 de las 100.

Por su parte B obtuvo 96 puntos y finalmente C, como se equivocó en seis preguntas, lo que indica que obtuvo 94 como puntaje final.

Es decir, los tres estuvieron por encima de los 90 puntos. Ahora piense en el dato que figura en el enunciado del problema: el *promedio*. Este promedio era de ¡75 puntos! ¿Qué dice esto sobre el examen de D?

Si entre los tres primeros obtuvieron un promedio que supera los 94 puntos (ya que los tres estuvieron por encima de ese puntaje), pero el promedio total *decayó abruptamente hasta llegar a 75*, es que el *único* de los candidatos que no habíamos considerado tiene que haber obtenido un puntaje *muy bajo*.

Es que para haber *reducido el promedio de más de 94 a 75* su prueba tiene que haber sido realmente muy mala. Fíjese que si D hubiera sacado *cero*

www.elsolucionario.org

puntos, el promedio de los cuatro *¡ya habría estado por encima de los 70 puntos!* O sea, lo que aportó D al promedio de los cuatro fue realmente insignificante.

Ahora, hagamos las cuentas para confirmarlo.

Queremos (juntos) buscar cuántas preguntas correctas contestó D.

Como en promedio se sabe que sacaron 75 puntos, eso quiere decir que:

> (98 + 96 + 94 + D) / 4 = 75 (*)

De acá es muy fácil deducir el resultado, ya que la igualdad (*) puede reescribirse así:

> 98 + 96 + 94 + D = 4 x 75 = 300

O sea,

> 288 + D = 300,

por lo que

> D = 12

La respuesta final, entonces, es que D obtuvo 12 puntos, pero como ya escribí, no es tan importante haber encontrado el resultado correcto como haber podido inferir, con los datos iniciales, que a D le tuvo que haber ido *muy mal* en el test y que su puntaje *tuvo* que haber sido extremadamente bajo.

Como escribí al principio, no se me escapa que el problema en sí mismo es muy elemental, pero el objetivo estaba puesto en otro lado: aprender a *conjeturar y estimar* si un potencial resultado puede estar bien o no, y, de paso, nos ayuda a testear nuestra capacidad para intuir… lo que no es poco.

Contraseña[44]

Así como el diario *El País* en España le ha dedicado una sección especial a resolver problemas de matemática durante todo el año 2011, lo mismo han hecho otras publicaciones del resto del mundo. El diario *Le Monde* en Francia hizo lo mismo en 2010, y aún hoy siguen apareciendo respuestas y apreciaciones de los lectores.

Elegí uno que me pareció interesante para pensar utilizando recursos de aritmética y combinatoria elemental. Por supuesto, *no hace falta* saber nada en particular, sino tener la voluntad de entretenerse un rato y disfrutar al hacerlo, aun si uno tropieza con la frustración de no poder encontrar la solución en forma inmediata. Casi es mejor que así suceda, porque si no, ¿qué gracia tiene tener un problema si uno lo resuelve sin esfuerzo? Acá va[45].

Alicia tiene una tarjeta que usa para retirar dinero en efectivo de su cajero automático. Como es esperable, tiene una «contraseña» que le permite acceder a efectuar el retiro. Es un número (que se llama PIN) que tiene *cuatro dígitos todos distintos entre sí y ninguno es cero.* Lo voy a llamar «abcd». Por ejemplo, si el número fuera 4793, eso querría decir que abcd = 4793. O sea:

> a = 4, b = 7, c = 9 y d = 3.

En el afán de producir alguna regla que le permita recordarlo, utilizó un camino ciertamente ingenioso. Le pido que lea con atención lo que hizo Alicia para que no se convierta en un trabalenguas. Es más difícil de escribir que de entender:

Alicia advirtió que si seleccionaba *todos los posibles números de dos dígitos* que podía generar (sin repetir) usando los cuatro dígitos de su PIN, los

www.elsolucionario.org

sumaba primero, y luego multiplicaba por 7 el resultado, obtenía nuevamente el PIN original.

Como se dio cuenta de que había solamente *una combinación posible de cuatro dígitos distintos que cumplían con esa propiedad*, eligió ese número como la contraseña que buscaba. De esa forma, si se la olvidaba, tenía una forma muy sencilla de recuperarla.

Por ejemplo, siendo el PIN el número 4793, los dígitos que aparecen son: (4, 7, 9 y 3). ¿Qué *posibles números de dos dígitos* —sin repetir dígitos— podríamos generar?

> 47, 49, 43
>
> 74, 79, 73
>
> 94, 97, 93
>
> 34, 37, 39

Esto le da una idea entonces de lo que hizo Alicia. Con los dígitos (a, b, c, d) generó todos los posibles pares, los sumó, y al resultado de hacer esa suma lo multiplicó por 7. El número que obtiene es el número del PIN.

La pregunta entonces es: ¿cuál es el PIN que eligió Alicia?

Solución

En vista de que uno tiene los dígitos (a, b, c, d), ¿cuáles son los posibles números de dos dígitos que se puede formar?

> ab, ac, ad
>
> ba, bc, bd
>
> ca, cb, cd (*)

da, db, dc

En realidad, cuando yo escribo ab es porque estoy escribiendo una forma abreviada del número (10 x a + b). Por ejemplo, el número 37 es una forma abreviada de escribir 37 = 3 x 10 + 7.

Por lo tanto, si yo quiero *sumar* todos los números que figuran en (*), lo que hago es:

> ab + ac + ad = (10 x a + b) + (10 x a + c) + (10 x a + d) = 30 x a + (b + c + d)
>
> ba + bc + bd = (10 x b + a) + (10 x b + c) + (10 x b + d) = 30 x b + (a + c + d)
>
> ca + cb + cd = (10 x c + a) + (10 x c + b) + (10 x c + d) = 30 x c + (a + b + d), y
>
> da + db + dc = (10 x d + a) + (10 x d + b) + (10 x d + c) = 30 x d + (a + b + c)

Si sumo *todos los términos* de la última columna, se obtiene:

> {30 x a + (b + c + d)} + {30 x b + (a + c + d)} + {30 x c + (a + b + d)} + {30 x d + (a + b + c)} = (haga las cuentas usted para corroborar que está de acuerdo con las operaciones que yo hago acá) =
>
> 33 x a + 33 x b + 33 x c + 33 x d = 33 x (a + b + c + d).

Una vez llegada a este punto, Alicia dijo que ella multiplicaba por *7* al resultado de esta suma y *recuperaba* el número que figuraba en su PIN.

Luego:

> 7 x 33 x (a + b + c + d) = abcd. (**)

www.elsolucionario.org

Ahora quiero que me acompañe en este recorrido que sólo requiere de *mirar* la igualdad que figura en (**) y sacar algunas conclusiones.

En principio, el número de la izquierda, se puede *reescribir* así:

> “
> $7 \times 11 \times 3 \times (a + b + c + d) = abcd.$ (***)

Todo lo que hice fue *descomponer* al número 33 como el producto de 11 por 3.

Sin embargo, eso permite deducir que como el miembro de la izquierda es múltiplo de 3, el miembro de la derecha *también* tendrá que serlo. Por lo tanto, el número *abcd* tiene que ser múltiplo de 3. Veamos qué se deduce de este hecho.

¿Pensó usted alguna vez para decidir si un número entero es o no divisible por *tres*? Es muy sencillo: «un número entero es múltiplo de *tres* si y sólo si la suma de los dígitos es múltiplo de tres[46]».

En este caso, la *suma* de los dígitos de abcd es (a + b + c + d). Por lo tanto, *uno descubre* que (a + b + c + d) es *múltiplo de 3*.

Pero entonces, en la igualdad (***), el término de la izquierda tiene *dos* múltiplos de 3: el propio 3 y por otro lado (a + b + c + d). Eso dice que ese término (el de la izquierda) es, en realidad, más que múltiplo de 3: es múltiplo de 9. En consecuencia, el término de la derecha de (***) (me refiero a *abcd*) tiene que ser *también* múltiplo de 9.

Y acá es donde quiero usar el criterio de divisibilidad por 9: «un número es divisible por 9 si la suma de sus dígitos es múltiplo de 9».

En este caso se deduce que *abcd* es múltiplo de 9. Y por la misma razón eso implica que la suma de los dígitos de *abcd* tiene que ser múltiplo de 9. Corolario: (a + b + c + d) es múltiplo de 9.

Ahora dediquémonos a analizar un poco más en profundidad al número (a + b + c + d). Como sabemos que los dígitos a, b, c y d son todos distintos, el

número más chico que puede alcanzar (a + b + c + d) es 10 (sumando 1 + 2 + 3 + 4). Por otro lado, el número más grande que puede ser (a + b + c + d) es 30, si es que uno suma (6 + 7 + 8 + 9).

En consecuencia, el número (a + b + c + d) es un número:

I) múltiplo de 9,
II) mayor o igual que 10 y menor o igual que 30.

Hay solamente *dos* números que cumplen con esas dos condiciones: 18 y 27. Sabemos entonces que *uno* de estos dos es el que me va a permitir *recuperar* el número del PIN de Alicia. Sólo habrá que usar o 18 o 27 en la igualdad (***).

Primer caso: Si elegimos (a + b + c + d) = 27, entonces en la igualdad (***) el número que se obtiene es:

> 7 x 11 x 3 x (a + b + c + d) = abcd, o sea, 7 x 11 x 3 x 27 = 6237.

Veamos si este número cumple con *todas las condiciones* que pedíamos para ser el PIN. Si generamos todos los números de dos dígitos posibles de dígitos con (6, 2, 3, 7), obtenemos:

> 62, 63, 67
>
> 26, 23, 27
>
> 36, 32, 37
>
> 76, 72, 73

Si sumamos todos estos números, obtenemos: 594.

A este número hay que multiplicarlo por 7: 594 x 7 = 4158.

www.elsolucionario.org

O sea, esto indica que haciendo estas operaciones, no obtenemos el número de PIN original (que suponíamos que tendría que haber sido 6237).

Segundo caso: Si elegimos (a + b + c + d) = 18, entonces en la igualdad (***), el número que se obtiene es:

> 7 x 11 x 3 x (a + b + c + d) = abcd, o sea, 7 x 11 x 3 x 18 = 4158

Ahora, generamos todos los pares posibles con los dígitos (4, 1, 5, 8). Se obtiene:

> 41, 45, 48
>
> 14, 15, 18
>
> 54, 51, 58
>
> 84, 81, 85

Si sumamos todos estos números, obtenemos (otra vez): 594.

A este número hay que multiplicarlo por 7: 594 x 7 = 4158… ¡y ahora sí recuperamos el número de PIN!

Moraleja

El análisis detallado de cada paso, permitió reducir todo a que (a + b + c + d) fuera o bien 18 o bien 27. Al considerar 27, no obtuvimos lo que queríamos (que era recuperar el PIN). Luego, si había una solución *tenía* que ser la que proveía (a + b + c + d) = 18, y así fue. Con esto hemos concluido que el *único* número de cuatro dígitos distintos que cumple con esa propiedad es el número 4158.

Final

No se me escapa que es *altamente improbable* que alguien elija su contraseña de esta forma. Sin embargo, el hecho de tener que usar herramientas de aritmética elementales y recorrer algunos caminos lógicos para descartar múltiples posibilidades, podrán no aplicarse de esta forma en la vida cotidiana, pero ciertamente permiten tener una educación distinta en el momento de tener que optar por elegir una contraseña. ¿No le parece?

www.elsolucionario.org

2. LÓGICA Y ESTRATEGIAS

El señor del censo

Haga de cuenta que el corriente es uno de los años en los que cada país censa a sus habitantes. No importa en qué lugar del mundo esté, los censos suelen suceder cada diez años.

El siguiente problema es —obviamente— ficticio, pero requiere de prestar atención a la forma en la que está planteado para poder encontrar la respuesta. En principio, parecería que *no hay suficientes datos*, pero créame, no es así. Acá va.

Imagine conmigo esta historia: «el señor del censo» golpea la puerta en una casa y desde adentro contesta una señora que lo hace pasar. La dueña de casa le ofrece un café. El señor va preguntando y tomando nota de las respuestas mientras llena el formulario «tipo».

Llega un momento en que le pregunta a la señora: ¿cuántos hijos tiene usted?

—Tengo tres hijas —contesta la mujer.

—¿De qué edades? —insiste el señor del censo.

—Vea, si consideramos números enteros, el producto de las edades resulta ser 36 —vuelve a decir la señora.

—Entiendo —dice el censista—, pero todavía no puedo deducir las edades.

—Mire, me acabo de dar cuenta de que aunque le dijera la suma de las edades, usted tampoco podría deducirlo —insiste la mujer.

—Bueno, en ese caso le pido que por favor me diga algo más —dice el señor.

—En ese caso puedo agregarle que a Elena, mi hija mayor, le gustan mucho los canarios —termina diciendo la señora.

—Ahora sí —concluye el «señor del censo»—, ahora ya sé las edades.

www.elsolucionario.org

¿Qué pasó? ¿Por qué ahora sí puede deducir las edades? Le propongo que antes de *darse por vencido*, se tome un rato y piense. Analice las posibilidades y no se someta (al menos no tan rápido) a la tentación de decir: «faltan datos». Si me puedo permitir sugerirle algo, entreténgase con el problema tanto como pueda. Y disfrútelo. La solución está acá nomás.

Solución

Como las tres edades son números enteros, y el producto es 36, veamos cuáles son *todas* las posibilidades para las edades de los hijas.

El número 36 puede *descomponerse* como producto de tres números de varias maneras. Acá está la lista completa:

> 36 = 1 × 1 × 36
>
> 36 = 2 × 2 × 9
>
> 36 = 2 × 3 × 6
>
> 36 = 1 × 6 × 6
>
> 36 = 3 × 3 × 4
>
> 36 = 1 × 2 × 18
>
> 36 = 1 × 4 × 9
>
> 36 = 1 × 3 × 12

Es decir, hay *ocho* posibles combinaciones de edades entre las tres niñas.

Ahora bien: en un momento de la charla, la señora le dice al censista que «aunque le diga la suma de las edades usted tampoco podría deducirlo».

Calculemos entonces las *sumas* de las *ocho* combinaciones que escribí:

> 1 + 1 + 36 = 38
>
> 2 + 2 + 9 = 13
>
> 2 + 3 + 6 = 11
>
> 1 + 6 + 6 = 13
>
> 3 + 3 + 4 = 10
>
> 1 + 2 + 18 = 21
>
> 1 + 4 + 9 = 14
>
> 1 + 3 + 12 = 16

Como se ve en esta lista, hay *solamente* dos *sumas* que se repiten, y son las ternas de números que *suman* 13.

O sea, cuando la señora le dice al «señor del censo» que aunque le dijera la *suma* de las edades él no podría deducirlo, *le está dando un dato extra.* Por ejemplo, si ella le dijera que la suma es 38, el censista ya sabría que las edades son (1, 1, 36). O si le dijera que la suma es 11, las edades *serían* (2, 3, 6). Por lo tanto, *las únicas dos ternas en las que la suma es igual o se repiten son:*

> (2, 2, 9) y (1, 6, 6).

Ya sabemos, entonces, que *tiene* que ser alguna de las dos ternas. Sí, pero ¿cuál?

Y acá es donde apelamos a un dato que pareciera irrelevante cuando la señora lo dijo (¿quiere volver para atrás usted y *releer* cada frase?). Cuando la mujer dice que a Elena, la hija *mayor*, le gustan los canarios, quiere decir que *hay* una *hija mayor*. O sea, *hay una de las tres hermanas* que es la mayor de todas.

www.elsolucionario.org

Si uno revisa las dos ternas, de las dos, la *única* que tiene esa propiedad es la terna (2, 2, 9) (Elena tiene 9 años entonces). La otra terna (1, 6, 6), no tiene una «hija mayor».

Eso termina por resolver el problema. Lo que parecía inocente (una vez más, *parece* inocente, porque *es* inocente) y que le *faltaban datos,* sin embargo, termina siendo accesible y resoluble.

La torre y la estrategia ganadora

En la vida cotidiana, uno se enfrenta múltiples veces con opciones, con decisiones que tiene que tomar. Las alternativas se presentan en distintas tonalidades de grises y no queda claro que haya *una* que sea la correcta, y así la o las otras en la categoría de *equivocadas o erradas.*

Es decir, ojalá fuera siempre una decisión *blanco-negro.* Pero tanto usted como yo sabemos que muy raramente es así. Por lo tanto, poder elegir educadamente requiere componentes de madurez, tolerancia, análisis, frustración. Es que toda elección implica una pérdida (todo lo que uno no eligió) y no siempre es fácil poder disfrutar de lo elegido teniendo que pagar el precio de *no tener* lo que uno *también* hubiera preferido tener.

Es obvio que ninguna ciencia provee *verdades absolutas* en este tipo de terrenos, pero lo que sí ofrece la matemática es un conjunto de herramientas lógicas que permiten mejorar la *calidad del análisis* y *elaborar estrategias.*

Una buena manera de entrenarse es a través de los juegos, cosa que yo incorporaría fuertemente en todos los estamentos de la educación. La capacidad de *imaginación* que tiene un niño, quien aún no está *domado* por lo que nosotros (los adultos) creemos que *hay que hacer*, les permite a los más jóvenes pensar de una forma distinta.

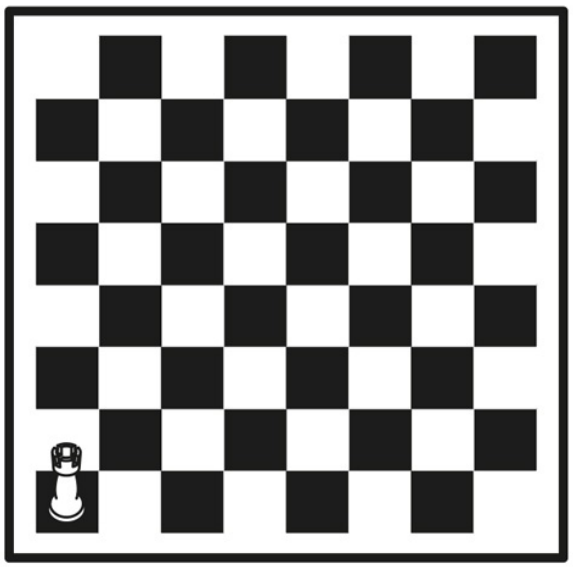
Hace algunos años un profesor, colega mío, me comentó sobre una situación que se le había presentado con dos de sus alumnos de doctorado. Les había sugerido un problema para que hicieran sus respectivas tesis hacía algunos años, pero después de algunos progresos iniciales, habían llegado a un punto en donde parecían haberse estancado. Entonces los juntó en su oficina y les dijo: «Es hora de que vayan ahora y busquen un nuevo *tutor*. Busquen por otro lado». Ante el estupor de los jóvenes, agregó: «Yo ya intenté por mi

www.elsolucionario.org

cuenta por todos los caminos que se me ocurrieron y sé que por allí no hay posibilidades de éxito. Ustedes necesitan de una nueva guía, de alguien que los encamine hacia otro lado, un ángulo que yo no alcanzo a ver. Si siguen intentando conmigo, están condenados a repetir los mismos errores que cometí yo. Ahora les toca a ustedes buscar por otro lado».

Más allá de la brutal honestidad con la que se paró frente a ellos y se reconoció falible/vulnerable… o si usted prefiere «humano», eso también fue una lección para mí. Los jóvenes requieren de estímulos y de la libertad para poder pensar e imaginar cosas. Encontrar un equilibrio entre la transmisión del conocimiento que se posee, guiar sin asfixiar y entender cuándo hay que retroceder, es una tarea muy complicada. Habrá sido complicado también para Maradona haber tenido que decir «basta, mi cuerpo no responde más» o para un científico Premio Nobel entender que los *mejores años* ya quedaron atrás. Lo cual no lo hace ni a Diego ni al científico menos respetables ni mucho menos. Sólo que hay momentos en la vida en que lo mejor que uno puede hacer es *dar un paso a un costado.* Como decía, *no es fácil.*

Vuelvo a los juegos. Fíjese en el siguiente juego que involucra un tablero de ajedrez (clásico, de 8 filas por 8 columnas, alternando blancas y negras). No se preocupe: no hace falta saber jugar al ajedrez para poder entender el juego. De todas las piezas que habitualmente participan del juego, solamente habrá una torre. La posición inicial de la torre es el *extremo inferior izquierdo*.



Participan dos competidores que se van alternando para jugar. Cada uno de ellos, cuando le llega el turno, puede mover la torre horizontalmente hacia la derecha tantas casillas como quiera, o verticalmente hacia arriba, también tantas casillas como desee. El objetivo es llegar hasta la casilla que está en el *extremo superior derecho*. El primero que llegue (con un movimiento legal) hasta allí, gana el juego.

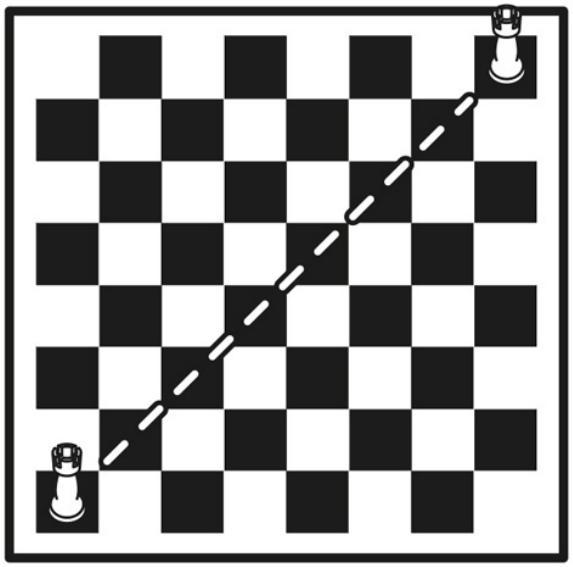
Las preguntas que tengo son cuatro:

a) ¿Hay alguna estrategia para *ganar* siempre?
b) Si la hay, ¿cuál es?
c) ¿Y quién de los dos gana: el que empieza primero o el que juega segundo?
d) ¿Hay alguna estrategia que le permita al primero ganar *siempre*, pero si no juega adecuadamente, gana *siempre el segundo*[47]?

Solución

El objetivo del juego es arribar a la casilla ubicada en el extremo superior derecho. Como la torre solamente puede mover en forma horizontal hacia la derecha o vertical hacia arriba, entonces, quien sea el que vaya a ganar el juego, es porque el último que movió dejó la torre o bien en la última columna o bien en la primera fila. Desde allí, está claro que a quien le toque jugar, gana. Más aún: únicamente desde alguna de esas dos posiciones (última columna y/o primera fila) se puede acceder a la casilla ganadora.

www.elsolucionario.org



Si usted estuviera jugando conmigo, y cada vez que le toca su turno, llevara la torre hacia la *diagonal* que une la casilla inicial con la final (como muestra la ilustración), o sea, la que ocupa el extremo inferior izquierdo con la que une el extremo superior derecho, está claro que desde allí, a mí me sería imposible ganar. Es decir, cualquiera de los dos competidores que por alguna razón «cae» en esa diagonal, inexorablemente sabe que desde allí y en un sólo movimiento *no puede ganar*.

Y esa es la *clave* del problema. Para que su rival (yo) no pueda ganar, todo lo que usted tiene que hacer es «empujar» la torre hacia esa diagonal, cada vez que le toque el turno.

Ahora bien: como la torre ***inicialmente*** está ubicada en esa diagonal, eso significa que quien tenga que jugar no puede ganar desde allí. Supongamos que soy yo el que empieza el juego. La torre está ubicada en el *peor* lugar para mí. Haga lo que haga, cuando le toque a usted, si juega de acuerdo con esta estrategia, empujará la torre hasta la diagonal otra vez**[48]**, y desde allí, ¡yo no puedo ganar! Y si yo estuviera forzado a llevar la torre hasta la primera fila o la última columna, listo: ganó usted.

¿Cuál es la moraleja de todo esto? (y de paso aprovecho para que juntos contestemos las preguntas que dejamos pendientes):

a) Sí, hay una estrategia ganadora. Si usted hace los movimientos previstos, va a ganar inexorablemente.

b) La estrategia consiste en llevar la torre *siempre* a la diagonal que une la casilla que está en el extremo superior derecho con la casilla que está en el extremo inferior izquierdo.

c) Gana el que juega segundo.

d) No. Si los dos juegan correctamente, el que empieza pierde seguro.

Una vez más, la matemática sirve como auxilio para buscar la solución: no sólo uno *sabe* que va a ganar si empieza segundo, sino que, además, *sabe* que si le toca empezar primero, el segundo le va a ganar inexorablemente (si juega bien). No es poco.

Es bueno aprender a pensar que hay situaciones en las que uno no tiene posibilidades de ganar y que, por lo tanto, lo mejor que puede hacer es minimizar la pérdida**[49]**. Eso también es *sabiduría.* Y la matemática tiene siempre muchas cosas para decir.

www.elsolucionario.org

¿Quién miente?

La matemática ofrece algunas herramientas muy poderosas y no siempre reciben ni el crédito ni la atención que merecerían. Voy a incluir acá un ejemplo muy sencillo y autoexplicativo.

En un banco en una plaza están sentados un niño y una niña. Tienen la cara tapada y no se puede deducir por la ropa que usan de qué sexo es cada uno. Se sabe que *al menos uno de los dos miente.* No se sabe cuál. Más aún: podría ser que mintieran los dos, pero lo que es seguro es que alguno de los dos no dice la verdad nunca (miente siempre).

Se produce entonces el siguiente diálogo.

Niño 1: «Yo soy una nena».

Niño 2: «Yo soy un varón». (*)

Con estos datos, ¿puede deducirse el sexo de cada uno?

Como usted advierte, el planteo es fácilmente comprensible. Le sugiero que ahora le dedique un poco de tiempo y fíjese si puede alcanzar a responder la pregunta.

Solución

Como se sabe que al menos *uno* de los dos niños miente, la situación se reduce a analizar los siguientes tres casos:

1) Que el niño 1 mienta y que el niño 2 diga la verdad.

2) Que sea el niño 2 el que mienta mientras que el niño 1 diga la verdad.
3) Que mientan los dos: niño 1 y niño 2.

Veamos juntos si con la estrategia de analizar cada caso por separado, y usando las dos frases que dijeron ambos (releer), es posible deducir el sexo de cada uno.

Caso 1: El niño 1 miente y el niño 2 dice la verdad. En esa situación, leyendo (*) se deduce que:

a) el niño 1 es un varón (ya que sabemos que miente y había dicho que es una nena);
b) el niño 2 es un varón también (ya que dice la verdad).

Este caso no resulta posible, ya que se deduciría que los dos niños son varones, y el planteo advierte que en la plaza hay sentados un niño y una niña.

Caso 2: El niño 2 miente y el niño 1 dice la verdad. En este caso, leyendo (*) se deduce que:

a) el niño 1 es una nena —ya que ella dice la verdad y eso fue lo que dijo en (*)—;
b) el niño 2 resulta *también* ser una nena, ya que si bien al leer dijo que era un varón, pero estamos ante la hipótesis de que miente.

Luego, se deduciría que *ambos niños son mujeres*, lo cual también es imposible porque el planteo original dice que son un niño y una niña.

Caso 3: Tanto el niño 1 como el niño 2, mienten. Si así fuere, leyendo se deduce que:

a) el niño 1 es un varón;
b) el niño 2 es una nena.

Y esto *sí* que es posible, porque cumple con todas las hipótesis que yo quería verificar: resultan ser dos niños de distintos sexo y además, al menos uno de los dos, miente.

www.elsolucionario.org

Luego, de los tres casos posibles, *el único* que cumple con todo es cuando ambos niños mienten.

Para terminar, tengo una pregunta: ¿le parece que este problema *se parece* a lo que uno *cree* que es «hacer matemática»? Intuyo su respuesta: «No, no se parece». De hecho parece un juego, y se parece porque lo es. Pero este es el tipo de «juegos» en donde uno entrena su capacidad lógica y, justamente, ésa es la idea: entrenar el músculo de la razón para poder tomar decisiones más educadas en la vida cotidiana. En esencia, esto ES hacer matemática, está en la esencia de lo que es hacer matemática cada día[50].

Duplicación de bacterias

En un laboratorio en donde se hacía investigación biológica, se cultivaban ciertas bacterias para estudiar sus propiedades.

Lo curioso es que los investigadores después de observar el comportamiento de esas bacterias, determinaron que se duplicaban una vez por minuto. Es decir, independientemente del número de bacterias con el que empezaran en el recipiente, ese número se duplicaba pasado solamente un minuto, y luego sucedía lo mismo con la nueva cantidad.

Habían empezado el experimento a la mañana temprano, y justo cuando el reloj marcaba justo las 12 del mediodía, el recipiente quedo completo. ¿En qué momento de la mañana estuvo por la mitad?

Solución: A las 11:59, porque se duplican una vez por minuto. Si justo se llenó a las 12 del mediodía, quiere decir que un minuto antes el recipiente estaba lleno hasta la mitad.

www.elsolucionario.org

Rotaciones en un restaurante chino[51]

Cuando me propuse escribir el siguiente problema, pensé que lo describiría como «*problema precioso*». ¿Quién podría discutirlo? En todo caso, la definición de *belleza* carece de sentido, ya que lo que es bello para mí puede no serlo para usted y/o viceversa.

Sin embargo, hay algunos patrones que parecen repetirse en la mayoría de las personas, y por eso existen obras de arte como *La Gioconda* o la *Quinta Sinfonía* de Beethoven, que resisten el paso del tiempo. Pero también hay amaneceres o puestas de sol que nos entregan una sensación de armonía y paz difíciles de replicar. O la alegría de un niño, el canto de un pájaro, una cumbre nevada, un nacimiento, una abuela con ojos brillantes… Pero también el gol de Maradona a los ingleses o el doble de Ginóbili en el segundo final a Serbia en los Juegos Olímpicos de Atenas o algún poema de Neruda o *Adiós Nonino* de Piazzolla o *Romeo y Julieta* de Shakespeare.

No crea que el problema que voy a escribir ahora se equipara a *nada* de lo que antecede, pero es *precioso* por virtudes propias, porque muestra el «poder» de la matemática para resolver un tema menor, irrelevante y muy posiblemente sin ninguna utilidad práctica. Pero debo confesar que me gustó desde el primer momento que lo vi y por eso quiero compartirlo.

Después de tanto prolegómeno, acá va.

En algunos restaurantes chinos, es muy común que un grupo de personas se siente a cenar alrededor de una mesa redonda. En el centro de esa mesa, hay una *suerte* de plataforma circular (véase la imagen) en donde es común apoyar los platos, y al hacerlo girar, permite compartir la comida entre todos.

Suponga, entonces, que hay *nueve*[52] personas sentadas a la mesa. El mozo que los atiende toma los pedidos de cada una de ellas y curiosamente descubre que *todos* pidieron un *plato* diferente.

Pasado un rato, el mismo mozo se dispone a distribuir lo que cada uno seleccionó, apoyándolo en la parte central de la mesa, en donde se encuentra la plataforma circular giratoria. Como no recuerda qué es lo que pidió cada uno, los apoya en forma *aleatoria* y aspira a que cada comensal haga girar la plataforma hasta hacer coincidir delante de él/ella el plato que había ordenado.

El problema consiste en lo siguiente: la/lo invito a que demuestre, que no importa cuál haya sido la distribución original de los platos en la plataforma, si *a ninguno le tocó lo que había pedido*, tiene que haber una manera de hacerla girar de forma tal que al menos a *dos* personas le toque su preferencia.

Resumiendo: si uno tiene sentadas en una mesa redonda a *nueve* personas, y cada una pide un plato distinto, y en el medio de la mesa hay un círculo que puede rotar, y justo cuando el mozo trae los platos a ninguno le tocó el plato que pidió, convénzase de que cualquiera sea la configuración inicial, siempre tiene que haber una posible rotación que deja al menos a *dos* de los comensales con los platos que habían pedido.

Ahora le toca a usted.

Solución

www.elsolucionario.org

Quiero empezar con una pregunta que quizás le permita avanzar a usted sola/solo en la solución del problema: ¿de cuántas formas se puede hacer rotar la plataforma[53]? Es decir, como hay nueve personas sentadas alrededor de la mesa, si uno hace rotar el círculo del medio, ¿cuántas maneras distintas hay de hacer coincidir los platos con las personas?

Si usted lo piensa un instante, descubrirá que hay *exactamente nueve* posiciones distintas. Luego de nueve pasos, uno vuelve a la posición inicial.

De lo que se trata, entonces, es de comprobar que si en principio *a nadie* le tocó el plato que pidió, alguna de esas nueve rotaciones tiene que hacer coincidir (al menos) a *dos* personas con lo pedido.

¿Por qué habría de suceder esto? Hagamos de cuenta que las personas están numeradas (del 1 al 9) y que los platos que pidió cada uno también (del 1 al 9).

Es decir, *ningún número de asiento coincide con el número de plato* que tiene delante. Ahora bien. La persona número 1 seguramente puede hacer girar la plataforma de manera tal que, en algún momento, de las *nueve* posiciones posibles *tenga* que haber alguna que deje el plato número 1 delante de ella. Y lo mismo sucede con la persona número 2: habrá alguna rotación que dejará el plato número 2 enfrente de él/ella. Y así siguiendo: *cada una de las nueve personas sentadas a la mesa puede hacer girar la plataforma de manera tal de hacer coincidir «su» número con el del plato que tiene delante.*

Pero si usted piensa por un instante, descubrirá que como hay *nueve personas,* y hay *nueve posibles rotaciones,* como ya sabemos que la posición inicial no deja a *nadie* con el plato que eligió, *tiene que haber alguna que deje al menos «dos» de los números de asiento coincidiendo con el número de plato.* Como en total hay *nueve* rotaciones, y la original no hace coincidir a nadie, alguna de las ocho restantes tiene que hacer coincidir a *dos* de los comensales. ¡Y eso resuelve el problema!

Es decir: simplemente contando el número de personas, el número de rotaciones posibles, el número de platos y el hecho de que la posición inicial deje a *todos* sin el plato que eligió, eso obliga a que al menos una de las ocho posiciones restantes deje a dos personas con el plato elegido.

Generalización

El número *nueve* no juega ningún rol particular en el problema anterior, es irrelevante. Por lo tanto, si uno tuviera *n* personas (en lugar de *nueve)*, y si estas *n* personas le hubieran encargado al mozo *n* platos diferentes, entonces con el mismo argumento que ya elaboramos se puede deducir que tiene que haber *al menos una forma de rotar la plataforma* de manera tal que deje a dos de los comensales con los platos que eligieron**[54]**. Ah, y por las dudas, *esto* también es *hacer* matemática.

www.elsolucionario.org

Otro problema de sombreros… ¿y van…?

Un «rey» convoca a los tres «lógicos» de su pueblo y les dice que necesita un nuevo primer ministro que lo ayude a pensar.

Les coloca un sombrero a cada uno, de manera tal que (como es esperable) todos pueden ver el sombrero de todos los demás menos el propio.

Cada sombrero es de color blanco o azul.

El rey les *garantiza* que al menos uno de los sombreros va a ser azul… o sea, o bien habrá uno azul, o dos azules o tres azules, pero *seguro* que no pueden ser los tres blancos.

Empieza a correr un reloj y cuando se llegue al minuto el que sepa su color de sombrero debe decirlo y *explicar* cómo lo supo.

Si al minuto de empezar el juego, ninguno dice el color de sombrero que tiene, correrá *otro* minuto. En ese momento, cuando se llegue a los 2 minutos, el rey volverá a preguntar si alguien sabe ahora qué color de sombrero tiene… y así siguiendo, una vez por minuto. Ésas son las reglas.

Le propongo imaginar tres situaciones:

1) En la primera, luego de que pasa un determinado tiempo, uno de los participantes se levanta y dice el color de sombrero que tiene.
2) En la segunda, otra vez, después de esperar un rato, *son dos los participantes que se levantan* y dicen su color de sombrero en forma correcta.
3) Y la última es cuando —después de esperar un rato— los *tres se levantan al mismo tiempo* y anuncian su color de

sombrero acertadamente.

¿Puede usted explicar qué tipo de distribución había hecho el rey en cada situación y cuánto tiempo hubo que esperar en cada caso?

Solución

Supongamos que usted es uno de los participantes. Empieza el juego y usted mira a las otras dos personas. Pueden pasar tres cosas:

a) Usted ve dos sombreros blancos.
b) Usted ve uno blanco y uno azul.
c) Usted ve dos azules.

Analicemos juntos cada caso.

a) Si usted ve dos sombreros blancos, como el rey dijo que *al menos* uno va a ser azul, entonces, al cumplirse el minuto usted se levanta y dice que tiene color azul. No hay otra alternativa: uno de los tres *tiene* que ser azul. Si usted ve que los otros dos tienen color blanco, no queda más remedio de que usted sea el que usa el sombrero azul. Esto explica la primera situación planteada en el problema original: se levanta *una* sola persona (en este caso usted) y eso sucede después de haber recorrido el primer minuto.
b) Si usted ve un sombrero azul y uno blanco, entonces, en principio no puede decidir qué tiene. Cuando se cumple el primer minuto, usted espera saber qué es lo que hacen los otros. Claramente usted *no está en condiciones de decir nada*, pero si la persona que tiene el sombrero azul, estuviera viendo que usted tiene un sombrero blanco… como el otro TAMBIÉN tiene un sombrero blanco, *esa persona tendría que decir*: «yo sé lo que tengo: ¡es azul!».

   Luego, pasado el minuto, o bien la persona que tiene el sombrero azul *dice* que tiene azul y se termina el juego, o bien, no dice nadie nada. Si así fuere entonces usted *sabe* que cuando se cumplan los dos minutos, usted va a poder decir *con seguridad* que tiene un sombrero azul. Por supuesto, con la misma lógica que usted, *la otra persona*

www.elsolucionario.org

que tiene el sombrero azul, verá desde el principio que hay uno que tiene azul y otro blanco… y por lo tanto se *levantará* también sabiendo lo que tiene. O sea, en este caso, habrá *dos* de los participantes (usted y otro) que sabrán qué color de sombrero tienen, siempre y cuando tengan la paciencia de esperar dos minutos. Esta distribución de sombreros explica la segunda situación planteada en el problema original: se levantan *dos* de los participantes y para que esto suceda tuvieron que pasar exactamente dos minutos.

c) Si usted ahora viera que las otras dos personas tienen sombreros azules, usted, igual que antes, no podrá decir nada en el primer minuto, seguro.

Sin embargo, si su sombrero fuera blanco, los otros dos participantes estarían en las condiciones del paso anterior (o sea, en [b]). Entonces, al pasar el primer minuto, sin duda nadie puede decir nada, pero al cumplirse el segundo minuto, *seguro que los dos* tendrían que decir que tienen sombrero azul.

Si también pasa el segundo minuto y nadie pudo decir lo que tenía, entonces, inexorablemente, al cumplirse el tercer minuto, *los tres sabrían qué color de sombrero tienen: ¡todos azules!* Y este caso contempla la tercera situación planteada, ya que es la única posibilidad para que se levanten los tres, y eso sucedió después de que hubiera transcurrido el *tercer* minuto.

Nota final

Estoy seguro de que problemas de este tipo no se van a cruzar nunca en su camino: ya no es más época ni de reyes, de *primeros ministros nombrados «a dedo»*, y quizás, ni siquiera de *sombreros.*

¿Por qué habría de incluir este caso en el libro? Porque la vida cotidiana plantea casi a diario situaciones en donde uno necesita hacer un análisis más *fino* sobre los caminos a seleccionar en cada caso, y entrenarse en *entender*

las decisiones que podrían tomar las otras personas que nos rodean y, por lo tanto, afectar las nuestras.

Explorar distintas estrategias, *leer* lo que hacen —o podrían hacer— los otros, entender la lógica que podrían estar usando *también es hacer matemática.* Por eso lo incluí acá.

Ah, y porque es divertido también, ¿no?

www.elsolucionario.org

Tres lógicos en un bar

El que sigue es un cuento que me mandó Juan Sabia[55] el 26 de septiembre de 2011. Me lo envió escrito en un mail que decía lo siguiente (y transcribo literalmente):

«Tres lógicos entran en un bar. El barman se acerca y les pregunta: "¿Todos quieren cerveza?". El primer lógico mira al barman y le dice: "No sé". El segundo lógico también lo mira y le dice: "No sé". Finalmente, el tercer lógico mira al barman también y le dice: "Sí"».

Por supuesto, es difícil tener que explicar una historia de este tipo, pero me interesa invitarla/lo a que *relea* el enunciado y vea si puede seguir el «hilo» de lo que sucede en el bar. Haga el intento de *deducir* qué es lo que quería cada uno y por qué el último de los tres está en condiciones de contestar afirmativamente la pregunta del barman. La/lo dejo a usted consigo mismo pensando qué pasó.

Reflexión

En principio, da la sensación de que *únicamente* tres *lógicos* (o personas que se dediquen al estudio de la lógica) puedan tener una conversación de ese tipo.

Segundo, quiero reflexionar con usted sobre lo que pasó. Cuando el barman pregunta si *todos* (y quiero enfatizar esta palabra: «todos») quieren cerveza, está claro que sin hablarse entre ellos es imposible que el primero (o el segundo) de los lógicos pueda contestar. Es que ninguno de ellos sabe lo que va a pasar con los otros.

Cuando le pregunta al primero, si *él* no quisiera cerveza, hubiera debido contestar que *no* a la pregunta de si *todos* quieren cerveza. Como no dijo «no», uno puede deducir que él *sí* quiere cerveza, pero no puede contestar la pregunta de si *todos* quieren, porque no sabe lo que van a contestar los dos que le siguen.

De la misma forma es posible deducir que el segundo lógico *también* quiere cerveza, pero tampoco puede contestar que *sí* (por las mismas razones que el anterior), porque no sabe lo que quiere el tercero.

Recién el último es quien cuenta con todos los datos para dar una respuesta. El tercer lógico es el *único* que puede contestar o bien que sí, o bien que no. Si dijera que no, significaría que *él* no quiere cerveza (pero los dos primeros ya sabíamos que sí). En cambio, como él *sí* quiere cerveza, y ya sabe que los dos que lo antecedieron también, entonces él contesta: ¡sí!, cuando el barman les preguntó si *todos* querían cerveza.

Como dije, es complicado tener que explicar un chiste. Sin embargo en este caso, creo que valió la pena. ¿Usted qué piensa?

www.elsolucionario.org

¿Dónde están las 25 mujeres?

El diario *Le Monde* de París, en su edición del 23 de marzo del año 2010, incluyó el siguiente problema de lógica, que solamente requiere idear una estrategia para poder resolverlo correctamente. Y nada más. De allí el atractivo. En realidad, *no hace falta* ***saber nada*** *más que pensar*. No es poco. Acá va.

Se tienen 100 niños ubicados en hilera, uno detrás de otro. La mitad de ellos son varones. La distribución de sexos en la fila es al azar.

Compruebe que no importa cómo esté construida la hilera de niños, siempre es posible encontrar 50 consecutivos de los cuales 25 —exactamente— son mujeres.

Como ve, no hace falta más que paciencia y ganas de pensar. Ahora le toca a usted.

Solución

Suponga que los niños están numerados del 1 al 100.

Elijamos los primeros 50. Digamos que allí hay 20 mujeres. Entonces, entre los que tienen números 51 al 100 tienen que estar las otras 30 mujeres. Y lo mismo si hubiera 23 mujeres entre las primeras 50. Entonces, las restantes 27 tienen que estar entre las segundas 50. Lo que queda claro es que si llamo **M(1,50)** al número de mujeres que hay entre las primeras 50 y **M(51,100),** entonces

> M(1,50) + M(51,100) = 50. (*)

O sea, las mujeres que «faltan» entre las primeras 50 *tienen* que estar entre las últimas 50.

Avancemos con esta idea: tenemos una distribución de niños cualquiera. Si justo entre los primeros 50 niños hay 25 mujeres, se terminó el problema: ya encontramos la solución.

Pero si eso no sucede, es porque o bien M(1,50) es mayor que 25 o menor que 25. Supongamos que

> M(1,50) < 25. (**)

Entonces, es porque

> M(51,100) > 25. (***)

Ahora voy a empezar a cambiar el segmento de 50 niños que considero. En lugar de tener los primeros 50, voy a ir «dejando» uno del principio de la fila, pero voy a incorporar el que sigue. O sea, en el primer paso, voy a considerar los niños que van desde el 2 hasta el 51 —y voy a calcular M(2,51) que me dirá cuántas mujeres hay allí—, después los niños que van entre el 3 y el 52 —y M(3,52) dirá cuántas niñas hay allí—, y así siguiendo hasta llegar a los últimos 50 niños, en donde M(51,100) medirá el número de mujeres que hay en ese tramo.

Sin embargo, me interesa invitarla/o a pensar qué puede suceder cada vez que *cambio* los 50 niños que considero. Cuando paso del (1,50) al (2,51), pueden pasar tres cosas:

O bien aumentó en uno (si el niño 51 es una mujer y el número 1 era un varón), o bien se mantuvo igual (si el sexo del niño número 1 y el 51 es el mismo), o bien disminuyó en uno (si el número 1 es una mujer y el 51 es un varón).

www.elsolucionario.org

Y como usted advierte, si ahora considero los niños que van desde el 3 hasta el 52, respecto del segmento anterior, o bien disminuye el número de mujeres en uno, aumenta en uno, o sigue igual.

Se obtiene entonces esta sucesión de números:

> M(1,50)
>
> M(2,51)
>
> M(3,52)
>
> M(4,53)
>
> M(5,54)…
>
> …
>
> M(48,97)
>
> M(49,98)
>
> M(50,99)
>
> M(51,100)

Sabemos dos cosas importantes: el primero de ellos —M(1,50)— es *menor* que 25, mientras que el último —M(51,100)— es *mayor* que 25.

Como la variación entre dos consecutivos es *a lo sumo uno*, entonces *tiene que haber un momento en la sucesión* en donde alguno de los valores tiene que ser *exactamente igual* a 25. ¿Por qué?

Como usted advierte, durante el trayecto el número de mujeres o bien aumenta en uno o disminuye en uno, o se mantiene constante. Luego, *tiene que haber algún momento* en donde *pase* de ser *menor* que 25 a *igual* que 25.

Esto *tiene* que suceder porque no puede pasar de menor de 25 a mayor de 25 sin haber encontrado un segmento en donde haya *exactamente* 25 mujeres. O

sea, un segmento en donde M(k,k + 49) = 25, ¡y eso es lo que estábamos buscando[56]!

Esto concluye la demostración, que como usted ve es mucho más difícil de escribir que de entender.

Una reflexión más: el análisis lógico (y por ende matemático) de la situación permite *deducir* que en *algún* lugar *tiene* que haber 25 mujeres consecutivas, pero no dice *dónde están ubicadas.* Y esto pasa mucho en la matemática: uno descubre que algo tiene que pasar sí o sí, pero no puede predecir *dónde ocurrirá.*

Nota

En lugar de dar por terminada la historia, le propongo que analice usted (luego de haber leído la demostración) algún caso particular para convencerse de que entendió la idea.

Por ejemplo, si M(1,50) = 24, ¿qué podría pasar con M(2,51)? Podrían suceder tres cosas:

a) M(2,51) = 25
b) M(2,51) = 24
c) M(2,51) = 23

Si M(2,51) = 25, se terminó el problema.

Si no, si fuera o bien 24 o 23, hay que seguir. Es decir, hay que analizar lo que sucede ahora con el segmento (3,52) y analizar los tres casos posibles. Hágalo usted. Constrúyase su propio ejemplo hasta convencerse de que comprendió el concepto. Le sugiero que recién en ese punto se dé por satisfecha/o[57].

www.elsolucionario.org

Un desafío con puntos y cruces (u hombres y mujeres)

Le propongo un desafío sencillo. Tome una hoja de papel cualquiera. Marque en esa hoja una cantidad de puntos cualquiera[58]. A algunos márquelos con cruces. A otros, con círculos sin importar cuántos de cada uno. Haga la distribución que quiera. Eso sí, tienen que cumplir una única regla: si usted traza el segmento que une cualquiera par de cruces, tiene que haber un círculo en ese segmento, o sea en algún lugar entre ambas cruces. Y al revés: si usted traza el segmento que une cualquier par de círculos, entonces tiene que haber una cruz ubicada entre los dos círculos.

Ahora le pido que haga el dibujo y vea lo que pasa, o mejor dicho, vea lo que *le* pasa. Verá que, aunque no lo pueda creer, no hay forma de hacer la distribución de cruces y círculos en la hoja que eligió *cumpliendo la regla que le pedí* **salvo** que estén todos los puntos sobre una misma recta.

Trate de comprobarlo por su cuenta. Es decir, trate de encontrar alguna razón que permita *aseverar* que sin importar cómo elijamos la distribución de los puntos y las cruces, si entre cualquier par de puntos de un tipo tiene que haber uno de los otros, entonces irremediablemente tienen que estar todos alineados. Convénzase de que esto es así y encuentre alguna forma de poder probárselo a cualquiera que lo desafíe.

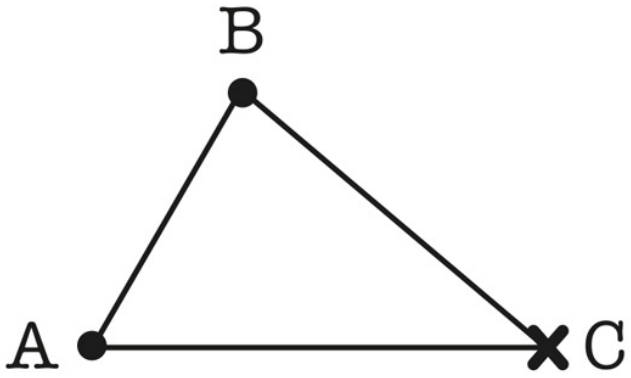
Solución

La demostración (que voy a proponer acá) de que todos los puntos tienen que estar sobre una misma recta es una utilización muy interesante de la matemática. Se trata de hilvanar ciertos argumentos. Hagámoslo juntos.

Supongamos que *no fuera cierto* lo que yo afirmé. Es decir: supongamos que se pudiera encontrar una manera de distribuir los círculos y las cruces de forma tal que no estén todos alineados pero que cumplan con la regla pedida.

Entonces, tiene que haber al menos tres puntos que no estén en una recta. Esos tres puntos van a formar un triángulo. Como usted advierte, yo podría formar *todos los posibles triángulos entre todos los posibles puntos* (que no estén alineados). Como hay finitos puntos (ya sean marcados por cruces o círculos) habrá finitos triángulos.

De todos esos triángulos, habrá uno que será el que tiene el *área más chica de todos*[59]. Este hecho es muy importante en el razonamiento. Por eso no avance si no me entendió. Digo, de todos los posibles triángulos que se puedan formar, como son finitos, tiene que haber alguno que sea el que tiene la superficie más pequeña. Me quedo con él, con ese triángulo (que se ve a continuación). Los tres vértices son parte del conjunto de puntos que usted eligió (cruces o círculos).

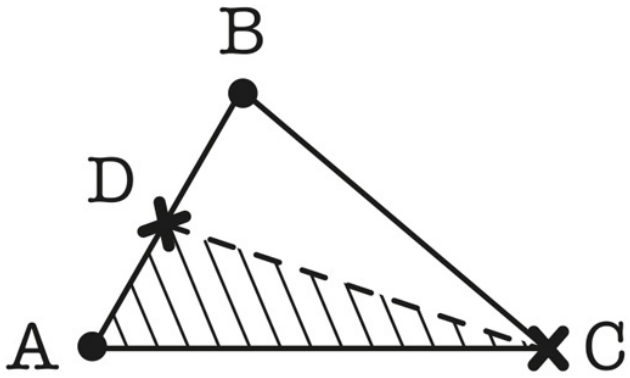


Como son tres vértices, tiene que haber por lo menos dos cruces o dos círculos (o incluso los tres iguales, pero al menos hay dos cruces o dos círculos). Supongamos que hubiera dos círculos, A y B. Entonces, como los puntos tienen que cumplir con la única regla que especifiqué al principio, entre estos dos círculos tiene que haber una cruz (D).

Pero ahora puedo formar *un nuevo triángulo* con los vértices ADC. ¡Y esto es una contradicción! ¿Por qué? Porque había supuesto que el triángulo ABC era el de área más pequeña de todos los posibles triángulos que pudiera armar con los puntos que había elegido, y la aparición del triángulo ADC contradice ese

www.elsolucionario.org

argumento. ¿Y por qué pasó esto? Sucedió por haber asumido que era posible distribuir los puntos en la hoja cumpliendo la regla pedida, pero que no estuvieran todos alineados.



Moraleja: No importa cuántos puntos sean ni cuántas cruces o círculos. Si cumplen la regla de que entre dos cruces hay un círculo y entre dos círculos hay una cruz, entonces ¡tienen que estar todos sobre una misma recta[60]!

Reflexión final

Si usted siguió todo el razonamiento, habrá descubierto que utilicé (utilizamos) un par de herramientas muy poderosas y muy útiles dentro de la matemática. Quiero resaltarlas porque son muy importantes para *convencerse y demostrar* algunas propiedades.

En principio, el hecho de *haber supuesto que no fuera cierto que todos los puntos estuvieran alineados* es haber *empezado* asumiendo que el resultado que quiero probar es «falso». Luego de hilvanar ciertos argumentos lógicos, llegamos a una contradicción. ¡Y justamente eso quiero remarcar!

Uno *asume que lo que quiere probar es falso*, y eso lo lleva a que algo imposible suceda. Por lo tanto, lo que uno quiere probar *¡tiene que ser cierto!*

Esta herramienta se conoce con el nombre de «demostraciones por el absurdo[61]».

Por otro lado, usted habrá advertido que utilicé otro hecho (muy importante): como el número de puntos señalados (ya sean «cruces» o «círculos») es finito, entonces uno puede fabricarse *todos los posibles triángulos* que formen estos puntos y luego concluir que *uno* de esos triángulos (si no más) tiene que tener el «área mínima». Ese argumento es esencial para esta demostración. El hecho de que sean *finitos* puntos garantiza que uno pueda usar esta idea, porque si fueran infinitos puntos eso no sería necesariamente posible.

Imagine que yo le diera un conjunto ***finito*** de números reales. *Tiene* que haber uno que sea *el menor de todos* (también otro que sea el *mayor de todos).* Sin embargo, si uno tuviera infinitos números, eso no sería necesariamente cierto**[62]** y, por lo tanto, no hubiera podido encontrar el que —supuestamente — era el triángulo de superficie mínima y de allí llegar a la contradicción.

www.elsolucionario.org

Las impresoras láser

El encargado de compras de una empresa decidió comprar dos impresoras láser usadas pero que estaban en buen estado. Las consiguió a través de dos personas distintas que se las vendieron en operaciones separadas.

El gerente general, cuando se enteró de lo que había sucedido, decidió que no eran necesarias y que debían deshacerse de ellas.

Así fue como pusieron un aviso en el diario y lograron venderlas a 1.200 pesos cada una.

Al hacer las cuentas, advirtieron que con una de ellas habían *ganado* un 20% en tanto que con la otra habían *perdido* un 20% (de lo que habían pagado por cada una).

¿Es posible decidir si el dinero que recuperaron fue el mismo que el que habían invertido? O sea, ¿la empresa ganó o perdió dinero con las operaciones? ¿O es como si no hubiera pasado nada?

Respuesta

De lo que se trata acá es de decidir cuánto pagó por cada una de las impresoras con los datos que uno tiene.

El precio que ingresó por cada una fue de $ 1.200.

Como con una ganaron el 20%, ¿cómo calcular cuánto pagaron por ella? O sea, ¿qué número incrementado en un 20% resulta ser 1.200?

Fíjese que lo que uno quiere es encontrar un número *x* de manera tal que cuando uno calcule el 20% de *x*, y se lo sume a *x*, obtenga el número 1.200.

Es decir

> $x + (20\%x) = 1.200$
>
> $x + (20x / 100) = 1.200$
>
> $x\ (1 + 20 / 100) = 1.200$
>
> $x\ (1 + 0{,}2) = 1.200$
>
> $x\ (1{,}2) = 1.200$

Luego, *despejando x*, se tiene:

> $x = 1.200 / (1{,}2) = 1.000$

Por lo tanto, la impresora con la que ganaron un 20% les costó originalmente 1.000 pesos.

(Si usted quiere, puede comprobar que las cuentas están bien, pensando en que si pagó 1.000 pesos por la impresora y le *agregamos* un 20% de ese valor, el resultado es 1.200, ya que el 20% de 1.000, es $ 200).

Ahora quiero averiguar cuánto pagó por la otra, que también vendió a $1.200, pero con la que *perdió* un 20%.

En este caso, lo que uno tiene que hacer es encontrar el número *y*, de tal manera que cuando le reste el 20%, obtenga el número 1.200.

Es decir

> $y - (20\%y) = 1.200$
>
> $y - (20 \times y / 100) = 1.200$

www.elsolucionario.org

$y\ (1 - 20 / 100) = 1.200$

$y\ (1 - 0{,}2) = 1.200$

$y\ (0{,}8) = 1.200$

Luego, *despejando y,* se tiene:

> $y = 1.200 / (0{,}8) = 1.500$

O sea, por la segunda impresora (aquella que al venderla perdió un 20%) pagó $ 1.500.

Ahora, uno ya tiene todos los datos que buscaba.

Por la primera impresora pagó $ 1.000 y la vendió a $ 1.200. En resumen, *ganó* $ 200.

Por la segunda impresora pagó $ 1.500 y la vendió a $ 1.200. O sea, *perdió* $ 300.

Moraleja 1: Como con una perdió $ 300 y con la otra (operación) ganó $ 200, en resumen, luego de las *dos operaciones*, *la firma terminó* ***perdiendo $ 100.*** Pagó $ 2.500 por las dos, y recuperó $ 2.400.

Moraleja 2: Esto sirve —una vez más— para convencerse de que si uno tiene un número al que le agrega un 20% y luego le resta un 20% se obtiene un número ***distinto*** del original. Y lo mismo al revés: si uno empieza con un número cualquiera, le deduce un 20% y al resultado, lo incrementa en un 20%, uno ***no llega*** al número original.

¿Cuántas páginas tiene un diario?

Desde el año 2008 la televisión pública argentina tiene un canal educativo. Me refiero al canal Encuentro. Uno de los programas que ha permanecido en el aire desde entonces está dedicado exclusivamente a la matemática: *Alterados por PI*. El año 2012 marcó la quinta temporada consecutiva. ¿Parece raro, no? ¿Quién hubiera podido imaginar algo semejante hace unos pocos años?

El programa evolucionó a medida que fuimos aprendiendo a hacerlo. Los primeros dos años los grabamos en un estudio de televisión. Después hicimos una temporada completa en un teatro con la presencia de público[63], y, finalmente, *salimos a recorrer escuelas del Gran Buenos Aires.* Ésa fue otra experiencia fascinante, porque nos permitió interactuar con estudiantes y alumnos de colegios primarios y secundarios, y ese contacto sirvió para *entender* más dónde están las verdaderas dificultades. Eso nos obligó a mejorar la *comunicación.*

Sin embargo, a lo que me quiero referir acá es a las reuniones de producción. En los cinco años que llevamos juntos, el grupo de trabajo ha tenido algunas variaciones[64], pero el corazón se mantiene constante. Lo que creo más notable es que las discusiones internas sobre cómo presentar los temas no sólo involucran a los matemáticos (los menos), sino a personas que *a priori* no habían tenido ningún contacto específico con la ciencia. No obstante, hoy sus opiniones son tanto o más valiosas que las de aquellos que proponemos el contenido específico.

Hemos recorrido un camino pleno de dolores de crecimiento. *Pensar* los temas y problemas es sólo una parte de la realidad, no menor por cierto, pero *el cómo* los comunicaremos obliga a la participación de *la gente de la televisión.*

www.elsolucionario.org

Conté todo esto porque muchas veces me tropiezo discutiendo con María Marta García Scarano, la productora del programa, que me ofrece una cara de «¡eso no se puede hacer en televisión!», o la de Woody González (el director de cámaras) que nos «aborta» una idea porque no tiene manera de presentarla de forma atractiva, o Ariel Hassan (el *creativo* del grupo) que no logra entender qué es lo que queremos decir y, por lo tanto, no sabe bien sobre qué es lo que debería *crear*. Y la lista de situaciones podría seguir.

Pero el objetivo es contar una anécdota particular: mientras buscábamos los contenidos para la quinta temporada, Pablo Milrud me propuso un problema que me sorprendió y que quiero transcribir. Me sorprendió porque involucra algo tan simple como el número de hojas de un diario, y me hizo pensar en algo que nunca había pensado antes (y muy posiblemente le pase a usted también). Acá va.

> El diario de la mañana estaba todavía en el piso después del reparto del canillita. Cuando lo fui a buscar, el viento lo hizo volar y se llevó «todas» las hojas menos una que alcancé a pisar. Era una hoja completa (con cuatro páginas). Por curiosidad, sumé los números de las cuatro páginas y me dio 50. ¿Será posible deducir cuántas páginas tenía el diario y, por lo tanto, cuántas hojas se volaron?

Yo sé que el problema en sí mismo es poco probable que ocurra en la vida real. ¿Quién —en su sano juicio— suma las páginas de una hoja de diario? Más aún: ¿quién pretende deducir el número de páginas «total» del diario usando los datos de una sola hoja?

Respuesta para las dos preguntas: ¡nadie! O peor: sí, hay por lo menos dos personas que pensamos el problema e hicimos las cuentas: Pablo Milrud y yo. ¿Se quiere sumar a nosotros?

Solución

Tome un diario cualquiera. Ábralo por la mitad. Es decir, apóyelo sobre una mesa y despliéguelo de manera tal que queden expuestas todas las hojas que lo componen. Como usted advierte, cada hoja consiste de *cuatro* páginas.

Ahora elija cualquier hoja y sume los números que figuran en cada página. Hágalo y verá que aparecerá algo interesante. Cuando haya terminado, tome cualquier otra hoja y repita el proceso. ¿Qué número le dio?

Si todavía no está convencida/o, elija otra y haga lo mismo.

¿Y ahora? ¿No está tentada/o en conjeturar algo? Sí… eso que usted está sospechando, es cierto:

No importa qué hoja usted separe del diario, la suma de los cuatro números que figuran en cada página es siempre el mismo.

Pensemos juntos en un ejemplo y veamos si sirve para imaginar cómo demostrar el caso general.

Supongamos que el diario tuviera 64 páginas. Entonces, la primera *hoja* tiene las páginas que llevan estos números: 1, 2, 63 y 64. ¿Se entiende por qué? Es que esa primera hoja es la que *cubre al diario por completo.* Es la hoja que está en la portada y la contratapa del diario.

Ahora pasemos a la *hoja* que sigue. Tendrá los números: 3, 4, 61 y 62.

La siguiente: 5, 6, 59 y 60. Creo que no hace falta que siga: usted ya debe de tener la idea.

Hagamos la suma de los números involucrados en cada hoja.

> Primera hoja: 1 + 2 + 63 + 64 = 130
>
> Segunda hoja: 3 + 4 + 61 + 62 = 130
>
> Tercera hoja: 5 + 6 + 59 + 60 = 130

Y si usted siguiera con las restantes hojas, descubriría que la suma de las páginas involucradas permanece constante: es siempre 130.

Ahora pasemos al caso general y tratemos juntos de demostrar que la conjetura que usted hizo (de que la suma de los números de las páginas es constante independientemente de cada hoja) es cierta.

En el caso de nuestro problema, si *n* es el número de páginas del diario, entonces las hojas tienen estas numeraciones:

www.elsolucionario.org

> Primera hoja: 1, 2, (n – 1), n
>
> Segunda hoja: 3, 4, (n – 3), (n – 2)
>
> Tercera hoja: 5, 6, (n – 5), (n – 4)

Y así siguiendo.

Veamos lo que sucede con la suma de los números que figura en cada hoja.

> Primera hoja: 1 + 2 + (n – 1) + n = 2n + 2 = 2(n + 1)
>
> Segunda hoja: 3 + 4 + (n – 3) + (n – 2) = 2n + 2 = 2(n + 1)
>
> Tercera hoja: 5 + 6 + (n – 5) + (n – 4) = 2n + 2 = 2(n + 1)

O sea, que a medida que vamos avanzando con las hojas, la *suma* de los números de cada página involucrada, permanece constante: 2(n + 1).

Ahora, apliquemos esto que aprendimos al caso que nos ocupa. Le recuerdo que la suma de los números de las páginas de la hoja que alcancé a *pisar* daba como resultado el número 50.

Lo que resta por hacer es plantear la igualdad:

> 50 = 2(n + 1), lo que implica que
>
> 25 = (n + 1), y por lo tanto,
>
> 24 = n.

La conclusión, entonces, es que el diario que se me voló tenía 24 páginas originalmente, se volaron cinco hojas y quedó solamente una que fue la que yo rescaté. Lo que hemos demostrado entonces es que si uno separa *una sola*

hoja de un diario y suma los números de las páginas, con ese dato solamente puede deducir cuántas hojas tiene el diario.

www.elsolucionario.org

Dar el vuelto

Hay ciertas actividades diarias que uno repite con tanta naturalidad, que no necesitan más que una mínima concentración. Por ejemplo, uno sube o baja una escalera sin pensar, o se abrocha los botones de una camisa sin prestar atención a la distancia entre uno y otro, cruza las avenidas de doble mano *mirando primero* hacia la izquierda[65]… y estoy seguro de que usted puede agregar muchos ejemplos más.

Le quiero sugerir que pensemos juntos en el siguiente caso. Supongamos que usted entra en un restaurante, consume por un valor de 118 pesos y paga con dos billetes de 100 pesos. El vuelto que usted debe recibir es de 82 pesos. En general, ¿cómo hace el mozo para entregárselos? Es decir, póngase en el lugar de él y piense cuál sería la forma más «económica» de entregar el vuelto. Cuando escribo «económica» me refiero a la *menor* cantidad de billetes posibles[66].

Parece una tontería, y de hecho lo parece porque lo es: usted entregaría un billete de 50, otro de 20, uno de 10 y uno de 2. Esto suma 82. Y listo.

En la Argentina, tenemos seis distintas denominaciones de billetes de menos de 100 pesos, sin incluir las fracciones: una moneda de un peso, y billetes de 2, 5, 10, 20 y 50.

Cuando alguien tiene que recibir o entregar un vuelto, usa un *algoritmo* que no necesita pensar, que sale automático: cada vez uno busca el billete/moneda más *grande* que «quepa» en lo que falta dar. En el caso de los 82 pesos de vuelto, primero nos fijamos en el billete más grande que «entre» en 82, y por eso uno elige el de 50. Quedan 32. Ahora, el más grande que «cabe» en 32 es el de 20. Todavía faltan 12. Entonces elegimos el de 10 pesos. Como todavía

faltan dos pesos, uno entrega un billete de esa denominación, y se terminó el proceso.

Este proceso garantiza que uno entregue *siempre*, cualquier vuelto, con el menor número de billetes/monedas.

La pregunta que uno puede hacer es la siguiente: este algoritmo, ¿sirve en todos los países? ¿Garantizará siempre que uno use la *menor* cantidad de billetes o dependerá de las distintas denominaciones?

Es curioso, pero uno tiene internalizado que la respuesta tendría que ser afirmativa, ya que ¡qué mejor que usar siempre el billete de mayor denominación que quepa en lo que falta aún de entregar como vuelto! Sin embargo, fíjese en este ejemplo.

Supongamos que, además de los billetes conocidos en la Argentina, se agregara uno de 25 pesos. Es decir, tendríamos la moneda de un peso y billetes de 2, 5, 10, 20, **25** y 50. Ahora, la/lo invito a que me acompañe a resolver esta situación: yo soy un vendedor en una casa de camisas. Usted compra una cuyo valor es de 60 pesos, y me paga con un billete de 100. ¿Cómo le entrego yo el vuelto?

Si uno siguiera el *algoritmo* que uno usa habitualmente, debería fijarse en cuál es el billete de mayor denominación que «cabe» en 40. En ese caso, el primer billete que debería formar parte del vuelto es el de 25 pesos. Todavía faltan 15 pesos. Luego, sigo con el mismo método y ahora agrego uno de 10 (que es el más grande que entra en 15). Quedan aún 5 pesos. Lo resuelvo usando un billete de 5. En consecuencia para devolverle 40 pesos usé tres billetes: 25, 10 y 5.

Sin embargo, a usted no se le escapa que yo podría haber resuelto la situación con solamente dos billetes, ambos de 20 pesos. En ese caso, yo le entregaría los 40 pesos usando un billete menos.

Moraleja

El algoritmo que uno usa todos los días (cuando tiene que entregar un vuelto) funciona en forma óptima en el caso en que los billetes sean los que

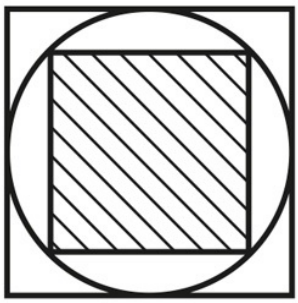
www.elsolucionario.org

habitualmente usamos: 1 (moneda), 2, 5, 10, 20 y 50. Pero si uno tuviera un billete de 25, y supone que eso *mejoraría* nuestra capacidad para *minimizar* la cantidad de billetes a entregar en un vuelto, tal cosa no necesariamente sería cierta.

Cuadrados que encierran un círculo

La idea de este problema es mostrar cómo uno puede analizar situaciones desde un lugar impensable. Para eso, es necesario tener la mente abierta. Mire la figura 1. Está compuesta por dos cuadrados y un círculo (comprendido entre los cuadrados).

Fig. 1



La pregunta es: ¿cuánto más grande es el área del cuadrado grande que la del cuadrado chico?

Le sugiero que mire la figura con cuidado. No hace falta que saque una conclusión apresurada. ¿Le parece que el más grande *duplica* la superficie del más chico? ¿Será una vez y media? ¿Tres veces? ¿Cómo hacer?

Solución

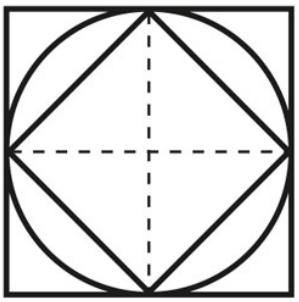
Por supuesto, uno puede usar un poco de geometría analítica y resolver el problema sin demasiado esfuerzo[67]. Pero lo que quiero hacer acá es que entre los dos descubramos *otra* manera de abordar el problema. Hacer algo

www.elsolucionario.org

distinto. Si usted se fija en la figura 1, descubrirá que hay muchas *simetrías.* Es decir, uno puede rotar el círculo sin que se alteren las condiciones iniciales, o bien puede rotar los cuadrados y si bien la figura va a cambiar su aspecto, la *proporción* entre las áreas de los dos cuadrados seguirá siendo la misma que antes de haber rotado.

Una vez que se convenció de eso, le propongo que rotemos el cuadrado más pequeño en 45 grados. Ni bien lo haga, los vértices de este cuadrado ahora van a coincidir con los puntos en donde el cuadrado grande y el círculo se tocan (son cuatro puntos) (ver figura 2).

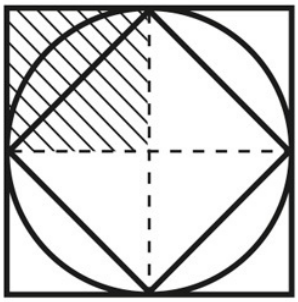
Fig. 2



Mire los lados del cuadrado chico. ¿Qué ve? Fíjese que ahora el cuadrado grande quedó dividido en cuatro cuadrados más pequeños, y justamente los lados del cuadrado chico son diagonales de esos cuadraditos.

Por lo tanto, el cuadrado chico ocupa exactamente *la mitad* del área del cuadrado grande. ¡Y ésa es la relación que estábamos buscando: el cuadrado grande tiene *el doble* de superficie que el chico! (ver figura 3).

Fig. 3



Como usted advierte, no hizo falta hacer ninguna cuenta ni usar nada sofisticado: fue simplemente haber «mirado el problema de otra forma», con otra perspectiva. Y los dibujos terminan por «romper los ojos» y ofrecer una solución impensada.

www.elsolucionario.org

Pensamiento lateral (pastillas)

El 23 de diciembre del año 2011 yo estaba en Benson, un pueblo en el estado de Illinois, cuya población no llega a los 500 habitantes. La temperatura todavía no castigaba como suele suceder habitualmente en el invierno de una buena parte del Hemisferio Norte, y los caminos eran transitables sin que estuvieran totalmente cubiertos de nieve. Gary Crotts es uno de mis mejores amigos norteamericanos. Si bien Gary no tiene una formación matemática, su capacidad de análisis no deja de sorprenderme. No recuerdo bien de qué discutíamos, pero sí sé, que la ruta se hacía cada vez más angosta y en un momento, cuando el sol me pegaba fuerte en los ojos, escuché un sonido proveniente de mi celular que me anunciaba que tenía un mensaje de texto. Decía así:

«Tengo un problema muy lindo para pensar. No sé cómo se hace, pero no te quiero decir nada ahora porque tengo miedo de que me lo arruines contándome la respuesta».

Era Manu Ginóbili, desde San Antonio. A punto de empezar la temporada de la NBA, Manu estaba con Many (su esposa) y sus mellizos. Le pedí que me contara el problema y que confiara en mí. Si lo conocía, no le diría nada.

Me dijo entonces que, como era demasiado largo, prefería mandarme un mail.

Lo que sigue fue lo que recibí a los cinco minutos. Como usted advertirá inmediatamente, está escrito en «español». Es decir, no en el español que usamos nosotros, sino en el español que usan en España. Acá va.

> El señor Norberto Ferrero padece una extraña enfermedad (conocida como «síndrome de Ferrero») que hace que todos los días deba tomar dos pastillas, una del tipo A y otra del tipo B. Estas pastillas son exactamente iguales en peso, color, sabor, olor, tamaño, forma… de modo que es imposible distinguirlas externamente y, sin embargo, es vital que Norberto se tome una pastilla de cada tipo cada día.

> Por eso, el señor Ferrero, muy organizado él, guarda las pastillas del tipo A en un pastillero marcado con la letra A y las pastillas del tipo B en un pastillero marcado con la letra B.
>
> Cada día, echa una pastilla del tipo A y otra del tipo B en su mano y se las traga. Pero hoy, después de echar la pastilla del tipo B, ha echado por accidente dos pastillas del tipo A en su mano, de modo que tiene tres pastillas y no puede distinguir cuál de las tres es la del pastillero B. Para colmo de males, Norberto no quiere simplemente tirar las pastillas y coger otras dos, pues son unas pastillas muy caras. ¿Qué debe hacer para, tomar ese día y los días siguientes una pastilla de cada tipo sin equivocarse y sin desperdiciar ninguna?
>
> Pensadlo, no es un juego de palabras ni una tontería y aunque parezca imposible, se puede hacer.

Me pareció pertinente conservar el texto original porque es simpático y el crédito hay que dárselo a quien lo imaginó y luego lo puso en internet para que estuviera a disposición de todos. No sé quién es el autor, pero ciertamente no fui yo.

Eso sí: el problema es sencillo pero *espectacular*. ¿En qué sentido? Es que ofrece otra manera de poner a prueba nuestra capacidad para pensar en «forma lateral». Es decir, si uno quiere pensar «a la bruta», avanzando por el camino habitual, es poco probable que tenga éxito. No digo que éste deba ser su caso: quizás a usted se le ocurre de inicio una forma de resolverlo y toda la elaboración que sigue le parezca irrelevante. Y está bien también, pero solamente quiero advertirle que a casi[68] todas las personas a las que les planteé el problema, les llevó un tiempo encontrar la solución.

Algunas observaciones más. El problema no tiene ninguna «trampa». Si la tuviera, no lo ofrecería para pensar ni acá ni en ninguno de los medios en los que trabajo[69]. Créame: no requiere de ninguna herramienta que a usted no se le pueda ocurrir.

Si le puedo ofrecer mi opinión, le sugeriría que se tome un tiempo razonable para pensar. No se apure. Una vez que haya intentado por caminos que le parece que lo llevan siempre al mismo lugar (equivocado), y cuando ya esté dispuesto a abandonar, déjelo por unas horas. Piense en otra cosa. Lo que creo que es muy probable que le pase es que súbitamente le aparezca el algún momento una «idea», una «idea distinta», algo que no se le había ocurrido hasta acá. Y se hará la luz. Por eso, si puede, disfrútelo y trate de no mirar la respuesta.

www.elsolucionario.org

Solución

Las tres pastillas que el señor tiene en la palma de la mano son dos del frasco A y una del B. De todas formas, él no sabe cuál es cual.

Lo que sí puede hacer es partir las tres por la mitad. Ahora, tiene la siguiente situación:

1) una pastilla A, partida por la mitad. O sea, dos mitades de A;
2) otra pastilla A, partida también por la mitad. Luego, tiene *otras* dos mitades de A;
3) una pastilla B, partida por la mitad. Por lo tanto, tiene dos mitades de B.

Si el señor eligiera una mitad de cada una de las pastillas que había elegido originalmente, y las tomara, habría ingerido dos mitades de A (provenientes de dos distintas pastillas de A) y una mitad de B. Le faltaría una mitad de B para completar su dosis diaria. Pero no sabe cuál de las tres mitades que le quedan en la palma *es* esa mitad de B.

Pero lo que *sí* puede hacer, es sacar una pastilla del frasco que contiene a las pastillas B, y partirla por la mitad también. Si agrega una de estas mitades a lo que había elegido antes, tendrá dos mitades de A y ahora, dos mitades de B. Eso es exactamente lo que necesita por día.

Más aún, sobre la mesa le quedaron: dos mitades de A (de las pastillas originales que había cortado por la mitad), una mitad de B, que también proviene de las pastillas originales, y una *mitad más* de B que fue la que eligió última.

La combinación de estas cuatro mitades le garantiza que para el día siguiente tendrá también su dosis exacta de pastillas A y B. El problema está resuelto.

Moraleja

Me encantaría poder estar en este momento en el mismo lugar que usted. Discutiríamos un rato sobre lo que fue pensando cada uno, intercambiando

ideas. Si le sirve, le digo que no sólo no se me ocurrió en el momento, sino que me llevó un par de días. Manu me volvió a llamar, ahora fastidiado, porque —como conté en una de las notas al pie— un compañero de él (Matt Bonner) lo había resuelto en diez minutos. Sin embargo, el fastidio no provino de saber que había otra persona que resolvió rápido el problema. No. Lo que lo enojaba es que le contó la solución y lo privó de la oportunidad de pensarlo. Ni más ni menos[70].

www.elsolucionario.org

Dos guardianes muy celosos

El que sigue es uno de los problemas de lógica más *clásicos* y a la vez *más antiguos* que se conocen. Al menos, yo recuerdo haber visto diferentes versiones desde que era niño. Sin embargo, no por eso es menos atractivo. Al contrario: creo que el hecho de que haya perdurado en el tiempo y se haya transformado en una suerte de *imprescindible* en cualquier grupo de problemas de lógica, lo pone en una categoría especial. Acá va (una versión posible, pero todas son conceptualmente iguales).

Usted se encuentra delante de dos puertas iguales. Ambas están cerradas. Detrás de una de ellas hay un lingote de oro que pesa 10 kilos. Del otro, un cerdo. En el lugar hay dos «celosos» guardianes. Se sabe que uno de ellos dice siempre la verdad, en cambio, el otro miente siempre, pero no hay forma de distinguir quién es quién.

A usted se le permite hacer una sola pregunta a alguno de los dos. ¿Qué pregunta se le ocurre que podría hacer para poder descubrir detrás de cuál de las puertas está el oro?

Respuesta

Una pregunta posible es la siguiente. Usted se enfrenta a cualquiera de los dos (ya que no sabe quién dice la verdad y quién miente) y le pregunta: «Si yo le preguntara al otro guardián cuál es la puerta que conduce al oro, ¿él qué me contestaría?».

Analicemos juntos las posibles situaciones que se podrían generar.

Por comodidad, voy a llamar O a la puerta que conduce hacia el oro y C a la que permite acceder al cerdo.

Posibilidad 1: Supongamos que uno le hace esa misma pregunta al guardián que siempre dice la verdad, pero usted no lo sabe. Como este guardia siempre dice la verdad, entonces cuando usted le pregunta qué diría el otro, él respondería que su compañero indicaría la puerta C (la del cerdo). Esto sucede porque el otro *tiene* que mentir.

Posibilidad 2: Si uno le preguntara al guardián que siempre miente, ¿qué le diría el otro guardia si uno le preguntara dónde está el oro?, él tiene que contestar que el otro guardián le indicará la puerta C también (porque en este caso, el guardián que miente tiene que decir lo contrario de lo que diría el guardián que siempre dice la verdad, que apuntaría a la puerta O). En resumen, el guardián que miente le diría a usted que la puerta que hay que abrir es la puerta C[71].

Conclusión: Cualquiera sea el guardia al que usted le pregunte, los dos apuntarán a la puerta C. Lo que le queda por hacer, entonces, es abrir ¡la puerta contraria a la que le indicaría cualquiera de los dos como la que conduce al aro en su respuesta! Eso le garantiza que la puerta que usted abra es la que tiene el oro detrás. ¿No es bonito y a la vez atractivo?

www.elsolucionario.org

Un test breve

La sociedad anda constantemente a la búsqueda de clasificar, etiquetar, encorsetar, uniformar. Parece que eso genera tranquilidad. Una vez que uno sabe que la persona que tiene enfrente pertenece a una cierta categoría, entonces ya sabe qué esperar de ella/él. Los que se «corren» del molde generan problemas. Los que dicen que *no*, también. Es como si hubiera una *necesidad* de poder *anticipar* lo que «está por venir». Pareciera que uno está mejor considerado, si es *predecible.*

De todas formas, en el afán de clasificar, hay medidas que no son opinables. Hay alguien que, evidentemente, es el más alto en un grupo, o el más pesado o el más viejo. Eso se mide fácil con un metro, una balanza o un calendario. Hay otros factores que requieren un poco más de esfuerzo: ¿quién es el que salta más alto?, o ¿quién es el que corre más rápido? O ¿quién es el campeón? Estos casos requieren o juegos olímpicos o bien campeonatos mundiales del deporte.

Igualmente, sirven como *medida.* Son cambiantes, pero miden con *cierta* precisión.

Toda esta introducción tiene que ver con la búsqueda (que también tenemos) de encontrar al «más inteligente». Y allí es donde empiezan los problemas. Ya que no hay un artefacto que mida la inteligencia, no hay un «metro patrón» ni un «litro patrón». ¿Qué quiere decir *ser* inteligente?

Mucho se ha escrito y mucho se escribirá sobre este tema, y por eso se crean tests de inteligencia, «medidores» del «coeficiente intelectual» (o IQ) u otras variantes. Todas, según entiendo, terminan siendo vulnerables, porque es muy difícil medir lo que no está definido. Una vez más, ¿qué quiere decir *ser* inteligente?

Por otro lado, más allá de la definición (si es que se puede *ignorar tamaño bache*), uno podría preguntarse: sea quien fuere considerado inteligente, ¿nació así? ¿Se hizo? ¿Es una mezcla? ¿Cuánto incidió el medio ambiente en el que se desarrolló/creció/crió? ¿Entrena uno la «inteligencia»?

Digo esto también porque hay un viejo refrán (repetido generación tras generación) que dice: «Lo que Natura non da, Salamanca non presta». O sea, está diciendo: «Vea, si su hijo o si usted no nació inteligente, *perdió para siempre»*. Será un «bruto» toda la vida. No se moleste en ir a la escuela/colegio/universidad. No le alcanzará. Me apabulla pensar que hay gente que *pueda creer* semejante barbaridad. Por eso es que *rechazo* visceralmente toda esta clasificación y medición de supuestas «verdades absolutas», o incluso de las «relativas».

Dicho todo esto, sí creo que hay formas de *estimular* nuestra capacidad de pensar, de hilvanar ideas, de relacionarlas, de elaborar razonamientos, de *entrenar* el cerebro.

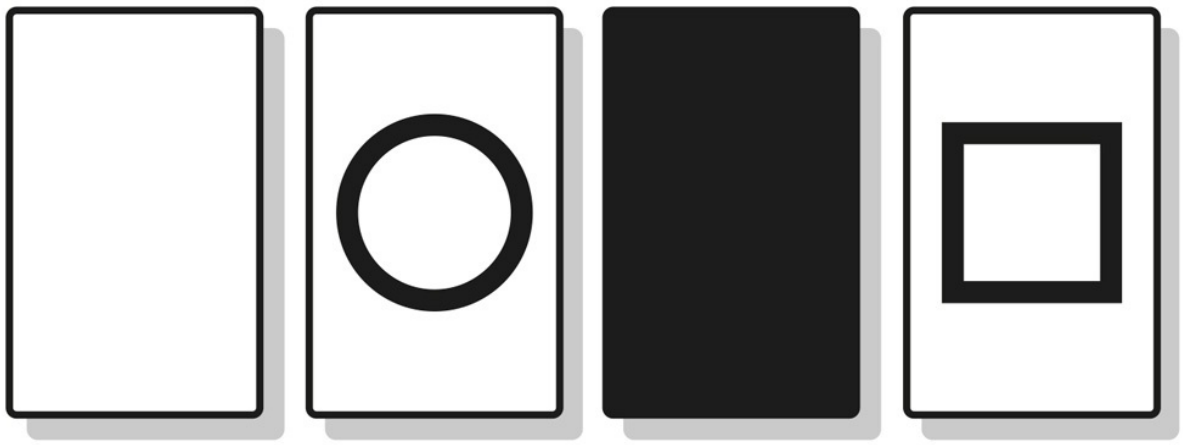
Aunque parezca que este último párrafo no incide en nuestra vida cotidiana, quiero ofrecerle una forma de testearse a usted mismo.

No lo mira nadie, no lo ve nadie. No tiene que rendirle cuentas a nadie. Está leyendo esto en soledad. Lea la situación que le propongo y piense qué debería contestar. Eso sí: es obvio que usted puede leer inmediatamente la respuesta, ¿por qué no? Bueno, pero si la lee se privará de la oportunidad de detectar en usted mismo cómo hace para entender un problema de lógica, que no es ni complicado ni difícil: *es.* Pero también, lo que es seguro, es que es un ejercicio de fácil comprensión. Acá va.

Un fabricante de cartas no convencionales, pone arriba de la mesa un mazo de 40 cartas. De un lado, digamos en el «lomo», hay un color sólido: blanco o negro. Del lado en donde habitualmente van los números, hay figuras geométricas: círculos, cuadrados, triángulos, rectángulos, etcétera. La «única» ley que tienen que cumplir es que si una carta tiene un círculo, entonces del otro lado (en el del lomo) tiene que haber color negro.

A usted le presentan ahora cuatro cartas de ese mazo. Esto es lo que usted ve:

www.elsolucionario.org



Frente a esa situación, a usted le dicen que de vuelta el *menor* número de cartas posibles para determinar si se cumple la regla que estipulamos: «Detrás de cada círculo tiene que haber color negro».

¿Qué haría? O sea, ¿cuál es el mínimo número de cartas que usted tiene que dar vuelta para poder asegurar que la regla que le pidieron al fabricante se cumple? Ahora le toca a usted.

Solución

La primera reacción (y correcta) es tomar la carta 2 y darla vuelta. Está claro que del otro lado el lomo *tiene* que ser *negro.* Si no, ya no se cumpliría con la regla estipulada.

Supongamos que sí, que el lomo de la carta 2 es negro. ¿Es todo lo que hay que hacer? ¿Podría haber alguna otra carta que violara la ley impuesta al fabricante?

Veamos. ¿Qué otra carta daría vuelta usted y por qué?

Estoy seguro que estamos de acuerdo que no tiene sentido dar vuelta la carta 4 en donde está el cuadrado, porque a uno no le interesa lo que pasa del otro lado: sea de color blanco o negro, no aporta nada.

¿Y entonces? La tentación (y acá la/lo invito a que piense un rato usted en soledad) es dar vuelta la carta 3, en donde está el color negro. ¿Por qué? Porque uno *tiende a creer que del otro lado tendría que haber un círculo* para que se cumpla la regla. Sin embargo, no es así. ¿Quiere detenerse un instante y pensar por qué no es así?

Porque si del otro lado no hubiera un círculo (digamos que hay un cuadrado), ¿contradiría esto lo que le pidieron? ¡No! Nadie dijo que no pudiera haber otras cartas que tuvieran el lomo negro. Lo que se pide es que *todas las que tengan círculos de un lado tengan que ser de lomo negro,* lo que no es lo mismo que decir que todas las negras tienen que tener círculos del otro lado. Una vez más, no avance si no está convencido de esto último que leyó: en entender *por qué no hace falta dar vuelta la carta 3 reside toda la dificultad.*

Sin embargo, lo que *sí* hace falta hacer, es dar vuelta la carta 1. ¿Por qué? Porque uno tiene que comprobar que no haya un círculo del otro lado. Es que si lo hubiere (un círculo) entonces, *fallaría la regla que dice que detrás de cada círculo* tiene que haber una carta de lomo negro. ¿Se entiende?

Resumen: El ejemplo es bien elemental y nadie puede sentirse mejor si lo resolvió bien ni peor si no lo hizo. En todo caso, lo que pretendí con él es mostrar que *sí* hay cosas de la lógica cotidiana que se entrenan.

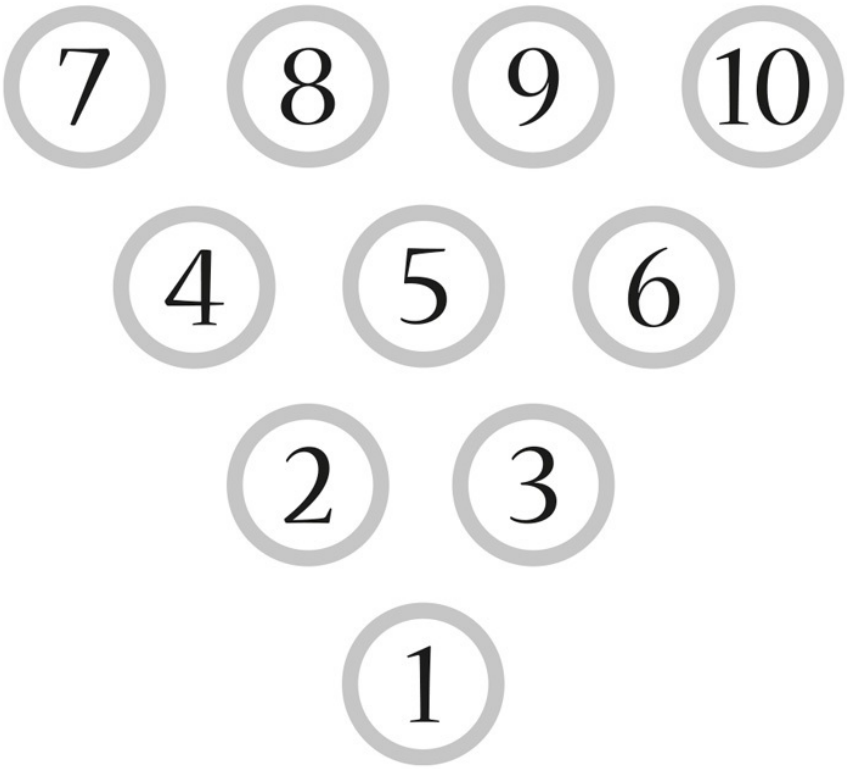
Entender cómo hilvanar este par de ideas para poder verificar si una regla se cumple o no es esencial en la vida cotidiana. Por supuesto, es irrelevante usarlo para este ejemplo de *cartas artificiales,* pero no es tan superfluo cuando uno analiza qué le está diciendo la persona con la que está hablando, o cuando intentamos comunicarnos con el prójimo.

Lo dejé para el final, pero no es por eso menos cierto: esto también fue *hacer matemática.*

www.elsolucionario.org

El bowling y los triángulos de colores

Le propongo un desafío. ¿Estuvo alguna vez en una pista en donde se juega al bowling? Habrá visto que en el fondo están dispuestos diez bolos en forma de triángulo. El objetivo es tratar de voltearlos todos en a lo sumo dos tiros. Pero no es eso lo que me importa, sino que quiero concentrarme en la distribución de esos bolos. Para eso la/lo invito a mirar esta figura. La numeración es sólo para poner en contexto lo que quiero plantear.



Como se advierte, uno puede construir muchos triángulos equiláteros usando estos números como vértices. Por ejemplo, el triángulo formado por 8, 5 y 9.

O el 6, 8 y 2. O bien el más grande 1,7 y 10.

Supongamos ahora que los bolos son de dos posibles colores: azul y rojo. ¿Será posible distribuirlos de manera tal que ningún triángulo equilátero quede formado con bolos del mismo color? Por ejemplo, si los lugares 7 y 10 están ocupados por bolos de color rojo, entonces el 1 debería ser de color azul. O sea, la idea es tratar de ver si se puede distribuir los diez bolos de la forma que indica la figura, de manera que ningún triángulo equilátero (de todos los posibles) tenga los tres vértices con bolos del mismo color. ¿Se podrá? Piénselo y verá que es un problema bien entretenido.

Solución

En lugar de escribir de inicio la respuesta, le sugiero que me acompañe para que la construyamos juntos. Si le es posible, tenga preparado un lugar en donde escribir para poder razonar juntos a medida que vayamos avanzando. Eso sí, no permita que yo lo distraiga con mi manera de pensar. Recorra la primera parte del camino conmigo, pero en cuanto detecte qué es lo que estoy haciendo, suélteme la mano y siga usted sola/solo. En todo caso, tome mi propuesta únicamente como una guía. Estoy seguro de que a usted se le va a ocurrir una manera de abordar el problema que lo haga sentir mejor. Ahora sí, allá voy.

Empecemos con el número 5[72], que está en el centro del triángulo grande. Voy a suponer que es de color rojo (R), pero el mismo razonamiento serviría si fuera azul (A).

Los bolos 3, 4 y 9 forman un triángulo equilátero. No quiero que sean los tres azules porque si no ya habría un triángulo equilátero con bolos del mismo color. Por lo tanto, al menos uno de ellos tiene que ser rojo. Supongamos que el 3 es rojo. Entonces, sabemos que el 3 y el 5 son rojos.

Luego, el 2 y el 6 tienen que ser azules (ya que, si no, cualquiera de ellos formaría con el 3 un triángulo equilátero de color rojo). Pero si el 2 y el 6 son azules, como el 8 forma con ellos un triángulo equilátero también, el 8 tiene que ser rojo. Pero como el 3 y el 8 son rojos, entonces el 10 tiene que ser azul. Pero ahora, como el 6 ya era azul y el 10 lo es, entonces al 9 no le queda más

www.elsolucionario.org

remedio que ser rojo. Pero si el 9 es rojo, entonces el triángulo 9, 5 y 8 tiene los tres vértices rojos y es equilátero.

Luego, como usted advierte, la conclusión es que no importa cómo haga uno la distribución de los bolos, no es posible evitar que en algún lugar quede formado un triángulo equilátero con vértices del mismo color.

Es decir, cuando empecé seleccionando el color del bolo que lleva el número 5, al avanzar en la distribución de los otros, fui tratando de evitar que quedaran formados triángulos equiláteros con vértices del mismo color. Como usted advirtió, así como sucede cuando uno tiene una hilera de fichas de dominó que al caer una empieza a producir una reacción en cadena, aquí sucedió lo mismo. En cada paso uno está poco menos que forzado a ubicar los bolos de una cierta forma, pero en el final queda atrapado por los colores que había antes y no puede evitar que quede formado un triángulo equilátero de los que quería eludir.

Este tipo de razonamientos lógicos, en donde uno va tomando decisiones a cada paso hasta terminar encerrado en lo que no quería que pasara, es muy útil para la vida cotidiana también. En situaciones en las que uno necesita imaginar un escenario en donde hay varios argumentos encadenados que van determinando lo que va a pasar en el futuro, sirve para tomar decisiones más educadas, o en todo caso, más pensadas, más elaboradas. Y para terminar quiero enfatizar que esto fue… hacer matemática también.

El problema del lingote de oro

Hay muchos problemas de lógica que involucran usar una estrategia para poder elegir entre varias opciones. Algunos se parecen entre sí, pero la variación en el enunciado obliga a pensar «de nuevo» a pesar de que uno alguna vez haya tropezado con alguna variante.

El siguiente requiere de hilvanar algunos razonamientos. Disfrútelo. Obviamente, es una situación ficticia que no pretende ser (ni mucho menos) algo que pueda darse en la vida real. Pero tampoco ése es el objetivo, sino poder inaugurar o recorrer caminos que requieren de algún tipo de elaboración.

Se tienen tres baúles iguales. Uno solo de ellos contiene un lingote de oro. Los otros dos están vacíos. Cada uno tiene pegada una leyenda con una frase que *debería* ayudar a decidir en cuál de los tres está escondido el lingote. Eso sí: se sabe que ***solamente una*** de las frases en uno de los baúles es verdadera. Las otras dos son falsas. Léalas y decida dónde está el oro.

Los tres baúles están numerados: 1, 2 y 3.

a) En el baúl número 1, la frase es: «El lingote *no está aquí*».
b) En el baúl número 2, la frase es: «El lingote *no está aquí*».
c) En el baúl número 3, la frase es: «El oro está en el baúl número 2».

Ésos son todos los datos. Ahora le toca a usted encontrar la solución.

Solución

www.elsolucionario.org

Los datos que tenemos son:

- Las tres frases que figuran en cada baúl.
- Exactamente *una sola* de las frases es la correcta.
- Hay un lingote de oro *en alguno* de los baúles.

Le sugiero que pensemos en las tres alternativas posibles: que el lingote esté en el baúl 1, luego en el 2 y, al finalizar, supondremos que está en el 3. Veremos qué conclusiones se pueden sacar.

Primer caso: Supongamos que el oro estuviera en el baúl número 1.

De ser así, la frase (a) sería errada (porque el lingote *sí* está allí), la frase (b) es cierta (porque el lingote no está en el baúl 2 como indica esa frase), y por último, como el oro está en el baúl 1 la frase (c) también es falsa, porque dice que el oro *está* en el baúl número 2, cuando en realidad está en el baúl 1.

Moraleja: El oro *puede estar en el baúl 1* sin que viole ninguna de las reglas.

Segundo caso: Supongamos que el oro estuviera ahora en el baúl número 2. En ese caso, la frase (a) es verdadera, la frase (b) es falsa, y la frase (c) es verdadera también. Pero esta situación no debería presentarse, porque habría dos frases verdaderas y una falsa, cuando sabemos que hay *exactamente* una que es verdadera. En consecuencia, descartamos que el lingote esté en el baúl 2.

Tercer caso: Supongamos que el oro estuviera en el baúl número 3. En ese caso, la frase (a) es cierta, la frase (b) es cierta, y la frase (c) es falsa. Pero esto tampoco puede producirse, porque habría dos frases verdaderas: la (a) y la (b). Y eso no puede ser.

Moraleja final: La *única* alternativa de las tres para el lingote de oro es que se encuentre en el baúl número 1. El razonamiento que hilvanamos anteriormente permite *comprobar* que de los tres posibles lugares en donde *podría* estar el oro, el baúl número 1 es el único de los tres que lo puede albergar sin entrar en contradicciones.

Suma, resta, producto y división sin calculadora

¿Qué pasaría si uno tuviera que «sumar, restar, multiplicar y/o dividir» y no tuviera una calculadora o computadora a mano? Qué condiciones *raras*, ¿no? Sin embargo, la idea no es imaginarse en una isla desierta y sin formas de comunicarse con el mundo exterior, sino de exhibir la *potencia* de la geometría. Sí, la *geometría*. Pareciera que todo lo que está asociado con la palabra *geometría* genera inmediatamente una suerte de *escozor*. O «urticaria». Y esa sensación está inexorablemente ligada con lo que uno «aprende» en el colegio. Sin embargo, hay algunas propiedades preciosas que son producto de la geometría, o mejor dicho, que *son* la propia geometría. Naturalmente, no voy a hacer acá un «tratado de geometría», y no sería por falta de espacio (una obviedad), sino porque no estoy capacitado para hacerlo. Ni siquiera estoy en condiciones de ser su *agente de prensa*.

Lo que quiero hacer es mostrar cómo se pueden usar argumentos geométricos para *efectuar las cuatro operaciones elementales:* suma, resta, producto y división, y *entretenerse/divertirse* en el camino.

Por las dudas, quiero advertir que no hace falta *saber* nada de antemano, no requiere —virtualmente— de ningún conocimiento previo. Sólo es necesario «mirar» y «pensar». Acá va.

Supongamos que usted se «fabrica» un segmento. Lo dibuja en un papel y *decreta* que ese segmento *mide «uno»*. Usted se preguntará: «¿Uno?». ¿Cómo «uno»? Sí, no importa en qué unidades usted quiera medirlo. Podría ser un metro, un centímetro, un kilómetro o una unidad de medida que usted elige o inventa. No interesa. Pero a partir de ahora, una vez que usted *decidió* lo que mide *uno*, todo el resto tiene que ser consistente. Por ejemplo, si yo le pidiera que dibuje «un medio», usted ya no puede hacer un segmento cualquiera. El segmento que mide un medio *tiene que ser tal que, si usted pone dos de ellos*

www.elsolucionario.org

juntos, el resultado tiene que ser el segmento original (ver figura 1). Lo mismo, si uno quisiera representar el número 1/2. O 1/3 (ver figura 2). Una vez hecha la elección de cómo se representa el número 1, a partir de allí *queda todo el resto de los números reales bien determinados*.

Fig. 1

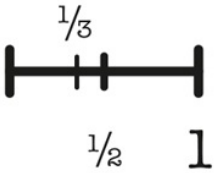


Fig. 2

De esta forma, en el momento en que se *fijó* lo que *mide* «uno», ya tiene *decidido* en el camino lo que van a medir *todos los otros números*[73].

Ahora, quiero describir una propiedad de ciertos triángulos.

Por ejemplo, fíjese en estos dos triángulos (ver figura 3). Les puse los nombres T y D sólo por comodidad.

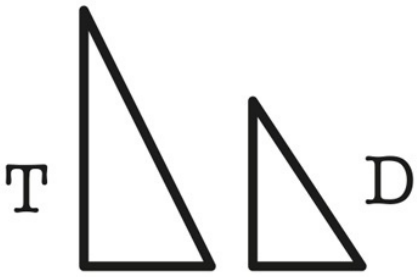


Fig. 3

¿Qué les nota? Se parecen mucho, ¿no? Es que si bien *no son iguales* (obviamente), *tienen* algo en común. Mírelos un rato y piense: ¿qué será lo que los hace *tan parecidos?*

Lo que los hace *tan* semejantes es que los dos *tienen* los *¡tres ángulos iguales!* ÉSE es el dato que uno advierte con los ojos, y que lo invita a pensar que son iguales. De hecho, es como si uno fuera una réplica del otro, como si uno fuera «el otro», pero «más grande» o bien «más chico». Por eso, ese tipo de triángulos se llama SEMEJANTES.

Fíjese que si uno de ellos tuviera dos de los tres lados iguales entre sí, entonces el otro también tendría que tener la misma propiedad (ver figura 4).

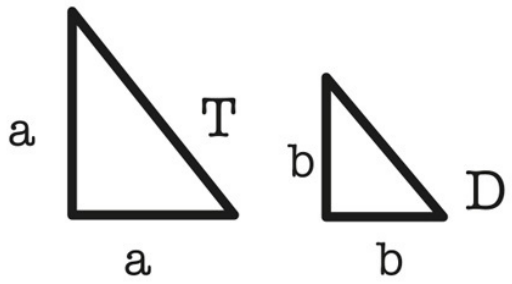


Fig. 4

Y además, si los *superpusiéramos,* debería quedar una figura así (ver figura 5):

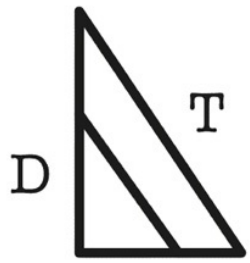


Fig. 5

Por último, lo que uno *deduce* es que la *proporción* entre los lados tiene que ser la misma. Es decir, por ejemplo, si a / b = 2 (o sea, si el lado *a* es el *doble* de *b),* entonces, c / d = 2 también. O sea, *se guardan las proporciones* (ver figura 6).

www.elsolucionario.org

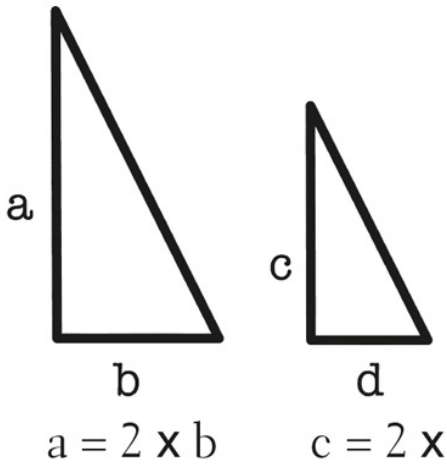


Fig. 6

Es que estos triángulos son una *réplica uno de otro*. Es como si los hubiéramos *ampliado* o *encogido* guardando las proporciones.

Ahora bien, ¿qué hacer con ellos? ¿Cómo *usar* algunas de sus propiedades?

Para eso, quiero mostrar cómo interviene la *geometría* en las operaciones elementales.

Suma

Esta operación es *fácil*. O debería serlo. Veamos: si uno quisiera *sumar* los números 3 y 1, es decir, conseguir el número 4 (ver figura 7), lo que uno hace es poner el segmento que mide 3 arriba de una mesa, por ejemplo, y *pegar* a continuación, el segmento que mide 1.

En general, si uno quiere sumar *a* más *b*, entonces, pone un segmento que mide *a* y pega al lado un segmento que mide *b*. Entonces, el segmento que resulta (el más largo) mide, justamente, *a* + *b*.

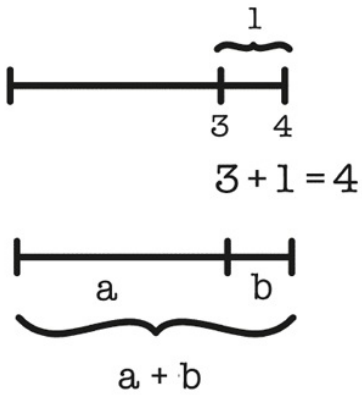


Fig. 7

Resta

¿No se anima a hacer usted sola/solo la deducción?

Acá va igualmente. Si uno tiene ahora un segmento que mide 4 unidades, y quiere *restar* uno que mide 1, entonces, lo que tiene que hacer es dibujar el segmento que mide 4, y encimar el que mide 1 pegándolo a una de las esquinas o de los extremos. Digamos que uno *lo pega* sobre el extremo derecho (ver figura 8).

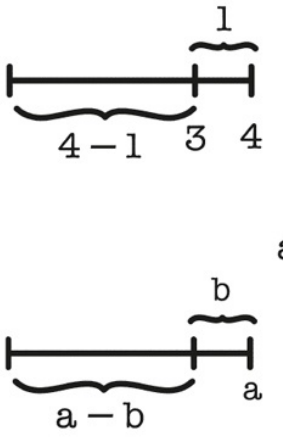


Fig. 8

En este caso, la distancia que va entre el extremo izquierdo y el *comienzo* del segmento que mide 1 es justamente 3, que es lo que uno quería medir.

www.elsolucionario.org

En general, si uno tiene un segmento de longitud *a*, y quiere *restarle* un segmento que mida *b*, entonces *apoya* el segmento que mide *b* sobre el otro, de manera tal que coincida en alguno de los dos extremos (en la figura 8, está apoyado sobre el extremo derecho) y, por lo tanto, el segmento que resulta desde el extremo izquierdo hasta el comienzo del que mide *b*, ahora mide *a* – *b*.

Producto

Ahora supongamos que uno quiere *multiplicar* dos segmentos de longitudes *a* y *b*, respectivamente. ¿Qué hacer?

Supongamos que yo le entrego dos segmentos que midan —respectivamente — *tres* y *dos*. ¿Cómo construir un segmento que mida 3 × 2? (o sea, seis).

Por supuesto, en este ejemplo lo más fácil sería poner el segmento que mide 3 y replicarlo al lado una vez más, así, tiene pegados *dos* segmentos que miden tres unidades cada uno y el segmento total ahora mide 6. Pero lo que yo quiero es usar lo que vimos un poco antes sobre triángulos *semejantes*, para poder construir el segmento que resulta del producto de dos segmentos de cualquier longitud, aun cuando no sean números enteros.

Fíjese que si tuviera los segmentos que miden *tres* y *dos*, uno puede hacer esto:

Fig. 9

Se produce una *escuadra*, como la que se ve en la figura 9. Apoye el segmento que mide *tres unidades* sobre la semirrecta horizontal, y el que mide *dos unidades*, sobre la semirrecta vertical.

Ahora, dibuje lo que aparece en la figura 10. Es decir, queremos construir dos triángulos semejantes. Pero ¿cómo? Entonces, *une* con un segmento los puntos en donde están marcados el 2 (en la recta vertical) y el 1 (en la recta horizontal).

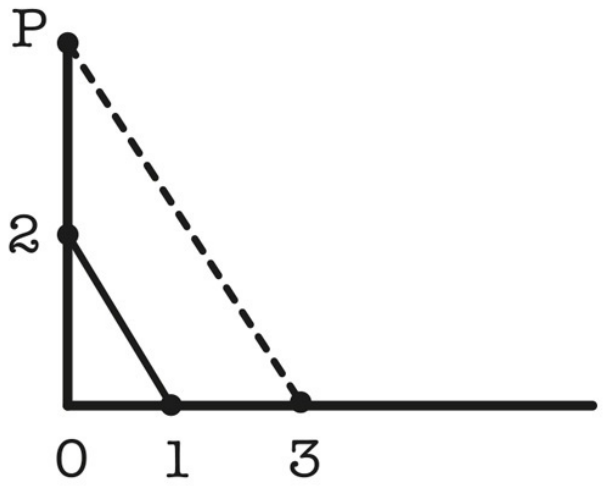


Fig. 10

Después (ver figura 10 en la línea punteada), trace una *paralela* a la que une el 1 con el 2, pero que ahora pase por 3. Ese segmento *corta* en algún lugar la semirrecta vertical. A ese punto lo llamo *P*.

Ahora, ¿cómo hago para calcular cuánto mide *P?* Lo que uno sabe es que como los lados de los triángulos semejantes son proporcionales, entonces, si uno se fija en la figura 10, el *cociente* entre 2 y 1 tiene que ser el mismo que el *cociente* entre P y 3. Es más: le pediría lo siguiente. Fíjese en la figura 10 y mírela hasta convencerse de que entiende lo que está escrito. No me crea a mí porque lo digo yo. Haga el ejercicio mental que vale la pena.

En ese caso, se tiene, entonces, la siguiente igualdad:

> “
>
> P / 3 = 2 / 1

www.elsolucionario.org

Luego, puedo *despejar* la *P*, y se tiene entonces:

> P = (3 x 2) = 6

Lo que hemos descubierto es que el segmento que mide *P*, en realidad, ¡mide 6! Y justamente, *mide el producto* de *2* x 3.

Otro ejemplo: Si uno quiere multiplicar 2 x 2, lo que tiene que hacer entonces es poner cada segmento que mide 2 sobre el eje horizontal y vertical. Luego unir el extremo superior del que mide 2 con el que mide 1 en el horizontal. Y luego *trazar un segmento paralelo* a este que pase por 2. En el lugar en donde *corta* el eje vertical, ese punto lo llamo *P*.

Uso otra vez la propiedad de los triángulos semejantes para deducir que si se toma uno de los triángulos (el más pequeño) y se divide las distancias entre dos de los lados (el que mide 2 y el que mide 1), ese número tiene que ser *igual* a si se dividiera el que mide P con el que mide *2* del triángulo más grande. O sea:

> 2 / 1 = P / 2

Otra vez, *despejando P*, se tiene:

> P = 2 x 2 = 4

Es decir, hemos «descubierto» que el número *P* era, en realidad, 4, que corresponde al *producto de 2* x *2* (ver figura 10.1).

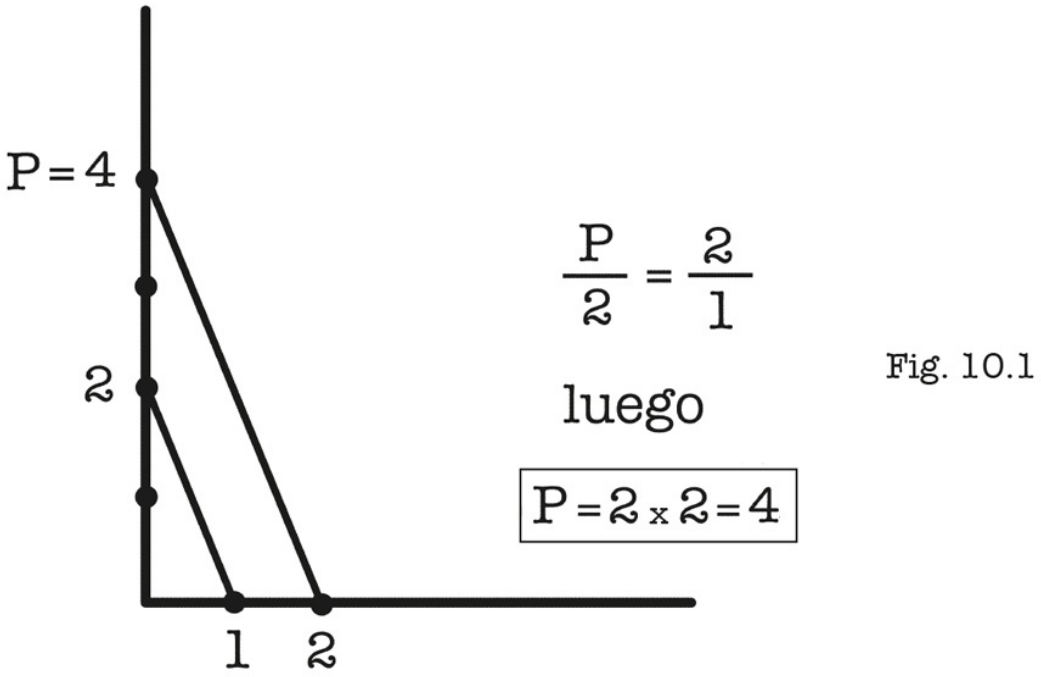


Fig. 10.1

Por último, si uno quiere generalizar esto para multiplicar dos números cualesquiera, *a y b*, y tiene los segmentos que *miden* esas longitudes, entonces (ver figura 10.2), marca *a* en el segmento horizontal (y también la unidad, o sea, el 1), marca b, en el eje vertical, traza un segmento que une *b* con *1*, y luego, un segmento *paralelo a éste*, que pase por *a*.

www.elsolucionario.org

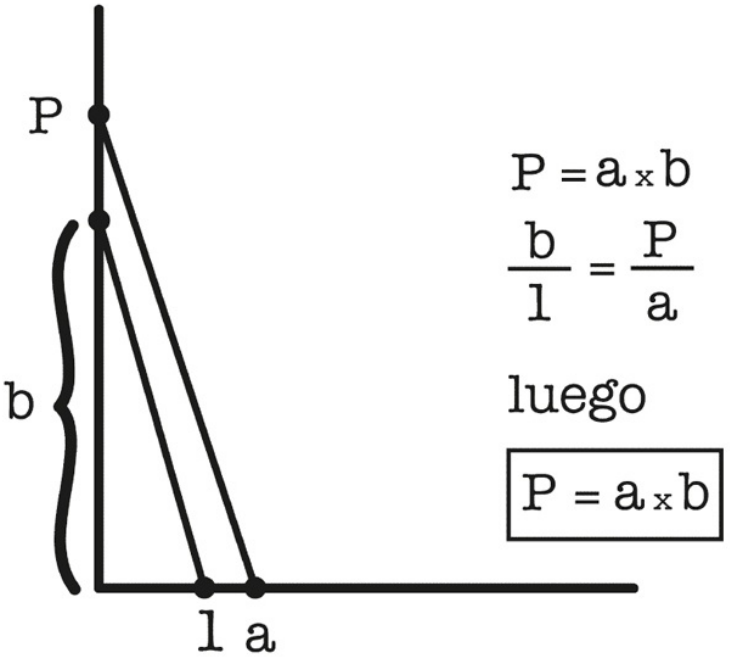


Fig. 10.2

Este nuevo segmento corta el eje vertical en un punto que llamamos *P*.

Uso la propiedad de los triángulos semejantes que me permite deducir que los *lados* de los dos triángulos que quedan dibujados tienen que ser proporcionales. Por lo tanto, si hago b dividido 1, eso tiene que ser lo mismo que dividir P por a.

Luego, se tiene:

> b / 1 = P / a

Despejando P,

> P = a × b

O sea, P mide lo que queríamos: a × b.

División

Si uno quiere dividir 3 por 2, es decir, encontrar un *segmento* que mida 3 / 2, ¿qué tiene que hacer? Lo invito a usar *otra vez* la misma propiedad de los triángulos *semejantes* que usé recién para el producto. Fíjese si usted es capaz por sí mismo de *construir* de alguna forma *un segmento que mida b / a.*

Empiezo (como antes) con el ejemplo que figura más arriba. Supongamos que uno quiere *fabricarse* un segmento que mida *3 / 2.*

Entonces dibuja un segmento que mida 2 y lo apoya sobre el eje horizontal, y otro segmento que mida 3, y lo apoya sobre el eje vertical.

Ahora une los extremos de estos dos segmentos, como se ve en la figura 11.

Por otro lado, marque el 1 en el segmento horizontal y trace una paralela al segmento que recién acaba de dibujar (ver figura 12) que pase por 1. Queda *marcado* un punto Q. Fíjese si puede descubrir *cuánto mide Q.*

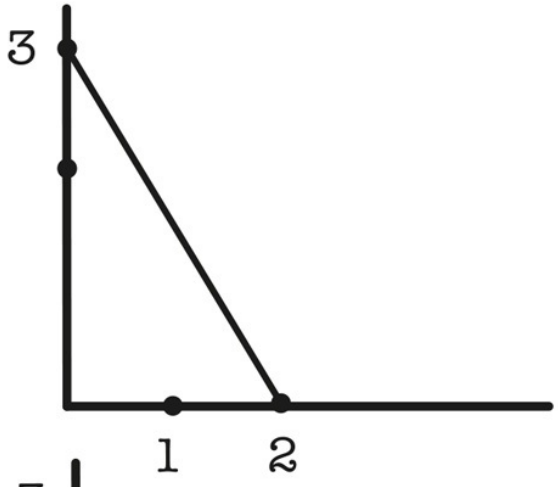


Fig. 11

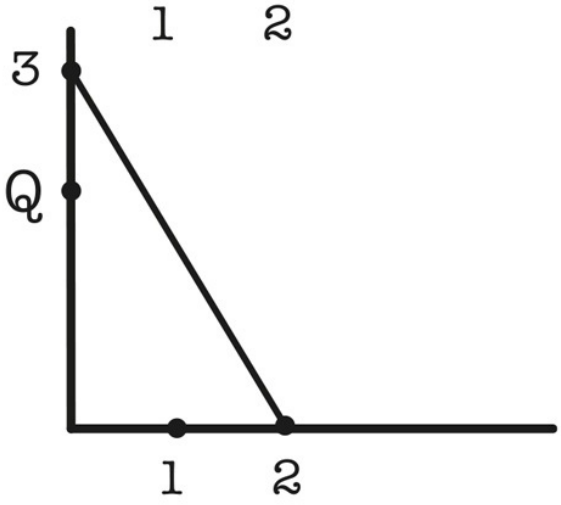


Fig. 12

www.elsolucionario.org

Sigo yo. Uso la propiedad de los triángulos semejantes que ya vimos. Se sabe que si divido Q por 1 es lo mismo que si divido 3 por 2.

Luego

> Q / 1 = 3 / 2

Es decir, hemos descubierto que el número Q (que mide la distancia que aparece en la figura 13) es, en realidad, el número 3 / 2. Así, este argumento nos permitió encontrar un segmento que *mida* lo que queríamos: 3/2.

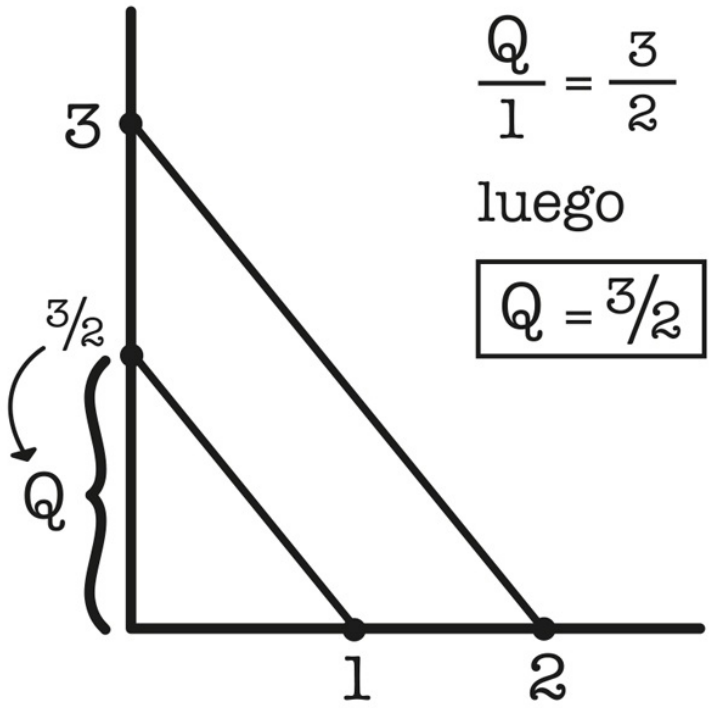


Fig. 13

En general, si uno tiene dos segmentos que miden *a* y *b*, ¿cómo hacer para encontrar un segmento que mida *b / a*?

En ese caso, uno pone el segmento que mide *b* sobre el eje vertical, luego el que mide *a* sobre el eje horizontal, traza un segmento que una los dos extremos de esas marcas que hizo, y, por último, traza un segmento *paralelo* al que acabo de dibujar, pero que pase por 1.

Este nuevo segmento *corta al eje vertical en un lugar que marco como Q.*

Usamos la propiedad de los triángulos semejantes y se tiene que el cociente entre Q y 1 tiene que ser el mismo que el cociente entre *b* y *a*.

Es decir,

> Q / 1 = b / a

Luego hemos *descubierto* que, justamente, *Q* mide lo que queríamos: b / a.[74]

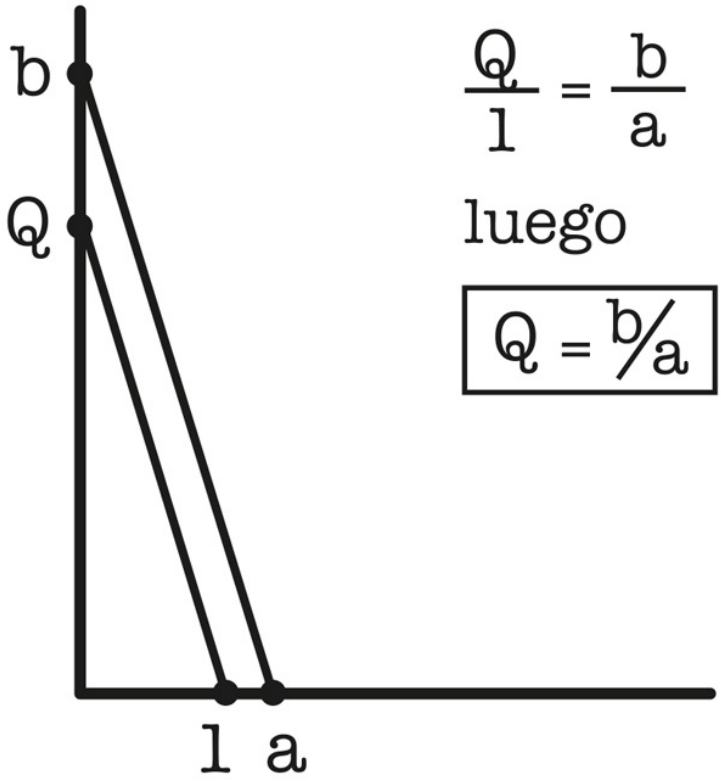


Fig. 14

www.elsolucionario.org

Cinco pintores, cinco habitaciones, cinco días

Conozco mucha gente que cuando se enfrenta con un problema como el que sigue, lo abandona antes de pensarlo.

En realidad, es un problema precioso para poder DISFRUTAR el pensarlo. No es difícil, pero no tiene una respuesta inmediata. Más aún, cuando uno llega al final (y estoy seguro que usted va a deducirlo con seguridad), créame que lo va a disfrutar. Se va a sentir bien. Se va a preguntar, incluso, ¿cómo se posible que no se le ocurrió antes?

Pero lo atractivo pasa por el camino que uno tiene que recorrer. Acá va.

«Si cinco pintores pintan cinco habitaciones en cinco días, ¿cuántos días tardarán 10 pintores en pintar 10 habitaciones?».

Antes de avanzar, estoy suponiendo condiciones ideales. Es decir: los pintores pintan *TODOS* a la misma velocidad y esa velocidad es la misma todos los días. Por otro lado, el tamaño de las habitaciones es siempre el mismo, los pintores no se cansan nunca, etcétera.

Como se advierte, la vida *real* no presenta situaciones de este tipo (en general). Pero sirva este rato para poder disfrutar de la capacidad de deducción que tenemos los humanos.

Ahora sí, lo dejo a usted con usted misma/mismo.

Solución

Le propongo otra pregunta antes de contar la solución.

¿Cuántas habitaciones pintan los *cinco* pintores por día?

Es decir, sabemos que los cinco pintan cinco habitaciones en cinco días. La pregunta que acabo de agregar es: ¿cuánto producen por día estos cinco pintores?

Como el *dato* que ofrece el problema es que tardan cinco días en pintar cinco habitaciones, eso significa que pintan *una* habitación por día. ¿Entiende por qué? Lo que sucede es que como necesitan los cinco días para pintar las cinco habitaciones, eso implica que por día, pintan una sola habitación. Por eso les hacen falta usar los cinco días.

Dicho esto, si al trabajar juntos los cinco pintores, pintan *una* habitación por día, ¿cuántas habitaciones pintaran *diez* pintores?

Piense usted.

Y sí. Si cinco pintores pintan *una* habitación por día, el doble de pintores, pintarán el *doble* de habitaciones. O sea, *dos.*

Luego, al trabajar los *diez* pintores juntos, pintan *dos* habitaciones por día. Para tener *diez* habitaciones pintadas, necesitan entonces pintar *cinco días.* ¿Se entiende? Es que si cada día pintan dos, necesitan 5 días para pintar las 10.

Y eso termina el problema. Aunque parezca extraño, si 5 pintores necesitan 5 días para pintar 5 habitaciones, entonces 10 pintores necesitan TAMBIÉN 5 días para pintar 10 habitaciones.

Al principio, parecía antiintuitivo. ¿Lo sigue siendo ahora?

Otra forma:

Quiero plantear ahora OTRA FORMA de pensar el mismo problema. Si los *cinco* pintores pintan *cinco* habitaciones en *cinco* días, eso significa que si hubiera OTROS *cinco* pintores pintando todos a la misma velocidad que los primeros, tardarían exactamente lo mismo que los otros en pintar *cinco* habitaciones: ¡*cinco* días! Por lo tanto, si uno tiene DIEZ pintores, pintarían 10 habitaciones en los MISMOS *cinco* días, porque uno lo puede pensar como dos *cuadrillas* iguales, de cinco pintores cada una, y las dos producen por

www.elsolucionario.org

igual: *cinco* habitaciones en *cinco* días. Luego, los 10 pintores pintarán 10 habitaciones en los mismos *cinco* días. Y no hay nada más que hacer.

Esta última forma de pensar el problema es muchísimo más reducida y muestra cómo uno puede pensar un problema desde distintos lugares. Las dos soluciones están bien, pero esta última es más económica, más elegante y más breve.

Una curiosidad de la aritmética

Tome el número 1.458 y sume sus dígitos.

> 1 + 4 + 5 + 8 = 18

Ahora, *invierta* los dígitos de 18. Se obtiene el número 81.

Ahora, multiplique ambos números:

> 18 x 81

Hágalo usted. ¿Qué apareció?

Interesante. El número que reaparece es el 1.458.

O sea, el número 1.458 tiene la propiedad de que si uno *suma los dígitos* que lo componen, y *permuta* los dígitos del resultado y luego multiplica los dos números, obtiene el número original: 1.458.

Si tiene ganas de entretenerse, puedo ofrecerle este dato: entre los números de cuatro dígitos, hay *solamente uno más* que cumple con esa misma particularidad. Más adelante figura la respuesta, pero lo interesante sería que lo busque usted por sus propios medios.

Respuesta

www.elsolucionario.org

Quiero invitarla/invitarlo a que piense conmigo. ¿Qué estamos buscando? Buscamos un número de *cuatro* dígitos, de manera tal que:

a) Primero sumamos las cifras que componen a este número.
b) Después invertimos los dígitos del resultado.
c) Finalmente, multiplicamos los dos números y reencontramos el número original.

Se trata, entonces, de encontrar la *mayor* cantidad de números de cuatro cifras que cumplan con estos requisitos. Veamos.

Voy a llamar A al número que buscamos, y voy a llamar *a, b, c* y *d* a los cuatro dígitos que lo componen. O sea, tenemos:

> A = *abcd.*

Advierta que como estos cuatro números (a, b, c y d) *no pueden ser más grandes que 9*, si uno los suma, el resultado *¡no puede exceder a 36!* Es decir, si uno suma los dígitos de *cualquier número de cuatro dígitos*, esa suma está «acotada» por 36.

Ahora bien, ¿cómo usar este dato? Esto quiere decir que los números con los que tengo que explorar en *revertir* para después *multiplicar* tienen que ser *¡menores o iguales que 36!* Es que como yo ya sé que la *suma* de los dígitos estará acotada a 36, *todo lo que tengo que hacer es verificar para qué números menores o iguales que 36 se cumple aquello de si lo revierto y luego multiplico por el número que daba la suma*, ¡vuelvo a obtener el número de cuatro dígitos original!

En este caso, estudiemos todos los posibles números de dos cifras que se pueden obtener al sumar *a, b, c* y *d.*

Hacemos una lista y verificamos con cada uno de ellos lo que sucede si los invertimos y los multiplicamos.

(a+b+c+d)	Inversión de (a+b+c+d)	Producto de ambos
0	0	0
1	1	1
2	2	4

3	3	9
4	4	16
5	5	25
6	6	36
7	7	49
8	8	64
9	9	81
10	01	10
11	11	121
12	21	252
13	31	403
14	41	574
15	51	765
16	61	976
17	71	1.207
18	81	1.458
19	91	1.729
20	02	40
21	12	252
22	22	484
23	32	736
24	42	1.008
25	52	1.300
26	62	1.612
27	72	1.944
28	82	2.296
29	92	2.668
30	3	90
31	13	403
32	23	736
33	33	1.089
34	43	1.462
35	53	1.855
36	63	2.268

Tal como se ve en la tabla, al multiplicar ambos números se obtienen números de cuatro cifras en solamente *trece* casos: 1.207, 1.458, 1.729, 1.008, 1.300, 1.612, 1.944, 2.296, 2.668, 1.089, 1.462, 1.855 y 2.268.

Al sumar los dígitos de estos trece números, *solamente en ¡dos! se encuentran los resultados que buscábamos: 1.458 y 1.729.* Luego, si uno toma cada uno de estos números (1.458 y 1.729), suma los dígitos (18 en el primer caso y 19 en el segundo), y los multiplica por la inversión de cada uno, se obtiene:

> “
>
> 1 + 4 + 5 + 8 = 18.

www.elsolucionario.org

Ahora lo invertimos y obtenemos 81. Y los multiplicamos: 18 × 81 = 1.458, que es ¡justo! el que cumple lo que queríamos (ya que 18 × 81 = 1.458).

Para el siguiente número, el 1.729, si uno *suma los dígitos* (1 + 7 + 2 + 9) = 19. Invertimos este número y se obtiene 91. Si multiplicamos 19 × 91 = 1.729.

Lo sorprendente es que estos dos, son los *únicos números —**de cuatro cifras** — que cumplen con los requisitos*, ya que si uno toma el 19, lo invierte y luego lo multiplica por 91, se obtiene (nuevamente) el número 1.729

Ya que estamos hablando del *número 1.729,* una observación: si usted verifica lo que apareció en el primer volumen de *Matemática… ¿estás ahí?* (pág. 117), el número 1.729 es el primer número entero que se puede escribir como suma de dos cubos, de diferentes maneras:

> “
> $1.729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$.

Nota: Si a usted le interesa avanzar un poco en este tema, quiero aportar un par de datos:

1) No hay ningún número que lo cumpla con más dígitos. Fíjese que ya para un número de cinco dígitos, el número más grande que se puede generar multiplicando la suma de los dígitos por el inverso es 3.627 (que resulta del producto entre 39 y 93). Luego es imposible recuperar el número original.
2) Con menos dígitos, hay solamente tres: 81, 1 y 0.
    a) Si uno suma los dígitos de 81, obtiene 9. El inverso es otra vez 9 (ya que el inverso de «9» es el mismo «9»). Luego, al multiplicar 9 por 9, se obtiene 81 como teníamos al principio.
    b) Otro número que cumple con todo es el número «1». Una vez más, al sumar los dígitos se obtiene otra vez el 1. Al invertirlo vuelve a resultar el número 1, y el producto

de 1 por sí mismo resulta 1, como el número original.

c) Con el número 0 sucede lo mismo que con el 1 (verifíquelo usted).

Moraleja final: Hay solamente cinco números que cumplen la propiedad que pedíamos al principio: 0, 1, 81, 1.458 y 1.729.

www.elsolucionario.org

El reloj con números de dos colores

Para celebrar el centésimo aniversario de la Real Sociedad de Matemática Española, el diario *El País* de Madrid produjo una cantidad de problemas de matemática para que fueran resueltos por el público, y ofrecía enciclopedias a quien lo resolviera y fuera seleccionado por un jurado formado *ad hoc* para el acontecimiento. Esto sucedió a lo largo del año 2011.

Con el objeto de celebrar junto con ellos es que quiero reproducir un problema que me pareció que podría ilustrar la variedad de ideas que aporta la matemática para estimular el pensamiento. Acá va.

Suponga que usted está mirando un reloj convencional de pared. Los números aparecen pintados en colores gris y negro y divididos exactamente por la mitad: seis de cada color. Se trata de probar que no importa cómo estén pintados los números, siempre existe una recta que divide al reloj en dos mitades (y deja seis números de cada lado), de manera tal que en cada una de las mitades haya tantos negros como grises: tres y tres.

Como ve, el enunciado es muy sencillo y fácilmente comprensible. Ahora, como siempre, le toca a usted.

Solución

Tome usted una recta cualquiera que separe los números del reloj en dos mitades. Si de uno de los lados ya hay tres en negrita y tres en regular, del otro también tiene que haber lo mismo. Luego esa recta ya sirve como respuesta al problema.

¿Qué pasa si uno no tiene tanta suerte? Es decir, uno traza una recta pero no tiene tres de cada tipo por lado. Entonces, ¿qué escenarios posibles hay?

En principio, podríamos tropezarnos con tres situaciones:

a) que haya seis de cada lado;
b) que haya cuatro negritas y dos regulares de un lado, y cuatro regulares y dos negritas del otro;
c) que haya cinco negritas y un regular de un lado, y las cinco negritas y el regular restante del otro lado (obviamente, estas situaciones son complementarias).

Y éstas son todas las posibles. Como quedó dicho, si al empezar ya hubiera tres negritas y tres regulares de cada lado, se termina la búsqueda.

Vayamos por partes. En el caso (a), supongamos que las seis negritas están de un lado y los seis regulares del otro (ver figura 1). Al ir rotando la recta como si fuera el minutero de un reloj, uno va cambiando los seis números que quedan de cada lado.

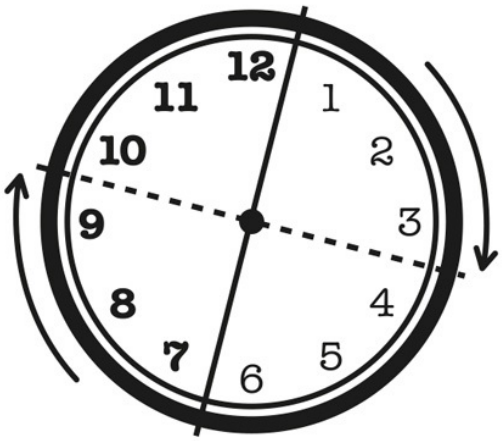


Fig. 1

En cada paso desaparece uno de los pintados en negrita y va apareciendo un regular. Al tercer movimiento uno dejó tres negritas pero aparecieron tres regulares y esto es lo que queríamos lograr.

Pasemos a analizar el caso (b) (ver figura 2 inicial).

www.elsolucionario.org

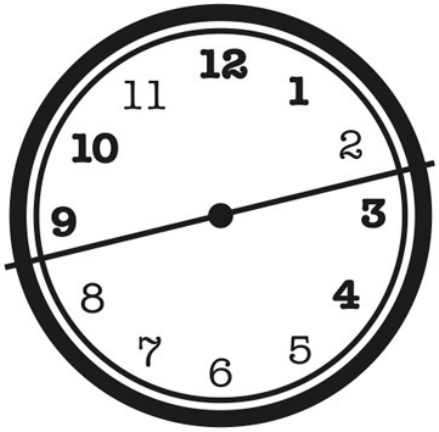


Fig. 2 (inicial)

Al hacer rotar la recta, uno agrega un número y pierde otro, por lo que la cantidad de números de cada tipo puede permanecer estable, o a lo sumo aumentar o disminuir en uno. De hecho, si al girar uno agrega una negrita y pierde una negrita, entonces la cantidad de cada tipo en cada mitad no se modifica. Pero si uno agrega una negrita y pierde un regular, entonces cada mitad aumenta o disminuye en uno los tipos que tenía antes de girar.

Por otro lado, al haber rotado la recta 180 grados, los seis números iniciales quedaron del otro lado, y viceversa. ¿Cómo usar este hecho? Si al empezar había 4 negritas y 2 regulares, al terminar el giro de 180 grados uno tiene 2 negritas y 4 regulares. Eso significa que en algún momento tiene que haber pasado por una situación en donde había 3 negritas de cada lado, y eso es lo que queríamos. Por ejemplo, si usted sigue el desarrollo de la figura 2 desde el paso inicial, y hace girar la recta en el sentido de las agujas del reloj, pasa por los estadios intermedios que están marcados. Al llegar a la figura 2 (final), se tienen tres negritas de cada lado: 9, 10 y 12 de un lado, y 1, 3 y 4 del otro, que era el objetivo perseguido.

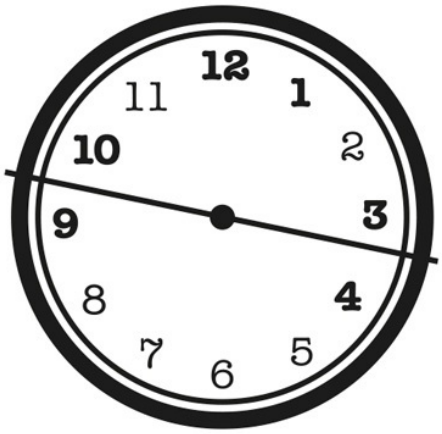


Fig. 2 (1er. paso)

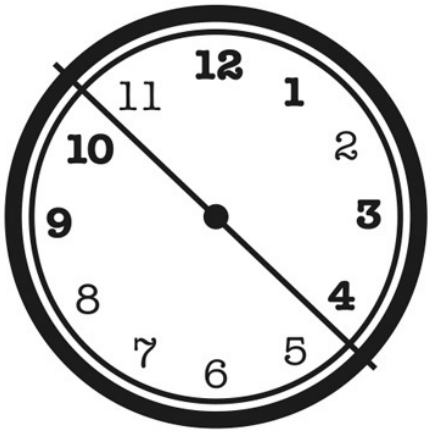


Fig. 2 (2do. paso)

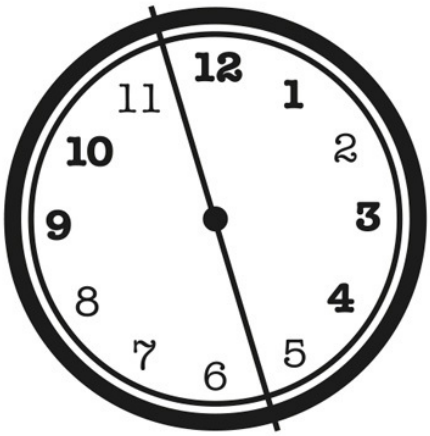


Fig. 2 (3er. paso)

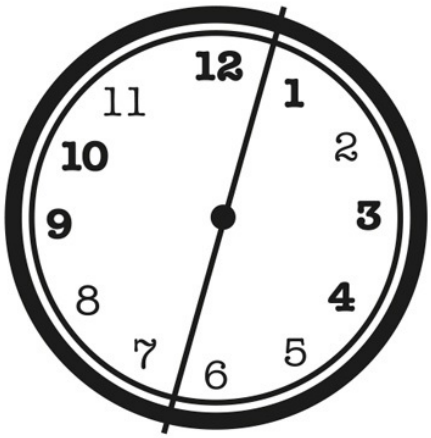


Fig. 2 (final)

Por último, en el caso (c) (ver figura 3 inicial) uno empieza con 5 negritas y 1 regular de un lado, y los restantes del otro. Al girar 180 grados termina con 5 regulares y 1 negrita. Igual que antes, en cada paso la cantidad de números de cada tipo o bien no cambia, o sube o baja en uno. Pero al empezar había 5 negritas de un lado y al terminar hay 1, eso significa que en algún momento se debe haber pasado por la situación en donde había 3, y eso es exactamente lo que queríamos demostrar. Por ejemplo, si usted sigue ahora el desarrollo de la figura 3 desde la posición inicial y hace girar una vez más la recta en el sentido de las agujas del reloj, pasa ahora por un solo estadio intermedio y

www.elsolucionario.org

llega a la figura 3 (final). Allí se obtienen tres negritas de cada lado: 9, 10 y 11 por un lado, y 3, 6 y 7 del otro, que era lo que uno quería.

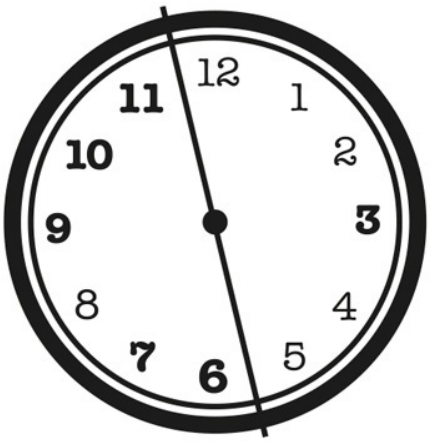


Fig. 3 (inicial)

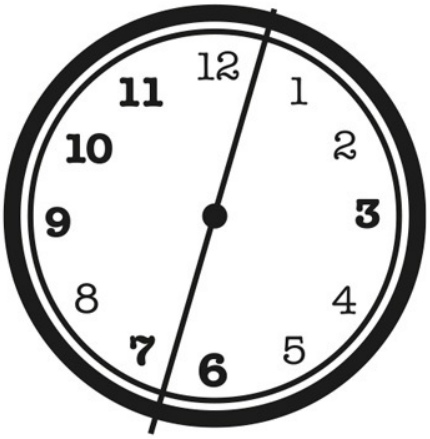


Fig. 3 (1er. paso)

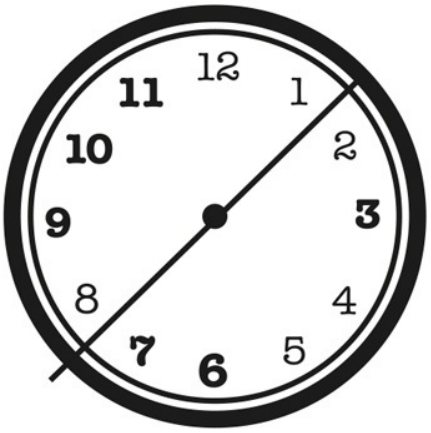


Fig. 3 (final)

3. PROBABILIDADES

www.elsolucionario.org

¿Poker o generala?

Dados. ¿Quién no ha jugado alguna vez a los dados? Un cubilete y cinco dados es todo lo que hace falta para poder jugar a la «generala[75]». Uno está dispuesto a tirar los cinco dados: si salen los cinco iguales, es «generala» (servida). Si salen cuatro iguales (y el otro no), entonces se llama «poker». Obviamente, es más factible conseguir poker que generala (en un solo tiro y con los cinco dados). La pregunta es: ¿Cuánto más fácil? ¿Cuánto más probable es conseguir un poker que una generala?

Y de eso se trata este segmento: tratar de contestar esa pregunta. ¿La quiere pensar? Yo continúo.

Respuesta

Quiero proponerle que calculemos juntos las dos probabilidades: la de sacar poker y la de sacar generala (siempre en un solo tiro y con los cinco dados dentro del cubilete, lo que se conoce con el nombre de poker y/o generala «servida»).

Empiezo con la generala. ¿Cuántas posibles generalas hay? En total, hay *seis.* Es que puede salir generala de «unos», de «dos», de «tres», de «cuatros», de «cincos» y de «seis». Y no más. O sea, hay solamente *seis* posibilidades.

Ahora contemos cuántas posibilidades hay de sacar poker.

Empecemos fijando el número con el que vamos a conseguir el poker. Digamos, de «unos». Eso significa que habrá cuatro dados que serán «unos» y el restante cualquier otro número distinto de *uno.* ¿Cuántas posibilidades hay? En total, *cinco.* ¿Por qué? Porque como cuatro de los dados están fijos en el

número uno, el dado que queda libre, solo podrá tomar los cinco valores restantes: 2, 3, 4, 5 y 6.

Luego, hay *cinco* posibles maneras de sacar poker de «unos». (*)

Pero hay que hacer una observación más: el dado libre puede ser cualquiera de los cinco. O lo que es lo mismo, hay cinco formas de conseguir un grupo de cuatro dados con los que conseguir el poker. Me explico mejor. Supongamos que los dados estuvieran numerados: D1, D2, D3, D4 y D5.

¿De cuántas formas se pueden elegir cuatro de ellos? De cinco formas:

> D1, D2, D3 y D4
>
> D1, D2, D3 y D5
>
> D1, D2, D4 y D5
>
> D1, D3, D4 y D5… y
>
> D2, D3, D4 y D5

Y no hay más. Por lo tanto, la conclusión que escribí en (*), dice que hay *cinco* posibles maneras de sacar poker de «unos», pero *solamente* con uno de los grupos de dados.

Como hay cinco posibles formas de seleccionar el grupo de dados que tendrá los números «uno», entonces hay que multiplicar esas cinco formas por 5. En total, uno tiene 25 formas de obtener poker de «unos»**[76]**.

¿Cómo seguir ahora? Hasta acá, hemos contado las formas de conseguir poker de «unos», pero habrá que seguir sumando los otros números. Así como hay 25 formas de obtener poker de unos, hay también 25 formas para conseguir *poker de cualquier otro número.* Como hay *seis* posibles números, entonces tenemos:

> 6 x 25 = 150

www.elsolucionario.org

formas de obtener poker[77].

En resumen: mientras hay *solamente* seis formas de obtener generala, hay 150 maneras de conseguir poker. Bastantes más, ¿no?

Si uno quiere ahora calcular la probabilidad de cada evento, todo lo que hay que hacer es dividir los casos favorables (seis en el caso de la generala y 150 en el caso del poker) por los casos posibles (todas las posibles combinaciones que se puedan dar con cinco dados). ¿Cuántas formas posibles hay de combinar cinco dados?

Cada dado puede aparecer en seis posiciones posibles. Por otro lado, lo que suceda con un dado es independiente de lo que pase con los otros. Luego, hay:

> “
> $6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 = 6^5 = 7.776$.

En consecuencia,

a) Probabilidad de sacar generala = 6 / 7.776 = 0,0007716…
b) Probabilidad de sacar poker = 150 / 7.776 = 0,01929012…

Dicho de otra forma, es 25 veces más fácil sacar poker que generala (ya que 150 / 6 = 25). Y ésa es la repuesta que buscábamos.

Más sobre dados

El problema que sigue tiene la particularidad de que uno podría llegar a la conclusión sin tener que *escribir nada*, sino usando solamente *el sentido común*. Acá va.

Supongamos que yo tiro un dado y después lo tira usted. ¿Cuál es la probabilidad de que usted saque un número más grande que yo?

Primera solución

Una posibilidad sería analizar todos los casos posibles que pueden darse al tirar consecutivamente dos dados, y después *contar* cuántos casos favorables tiene usted (o sea, usted saca un número mayor que yo) y en cuántos casos gano yo (o sea, mi número es más grande que el suyo). Por supuesto, tendríamos que ponernos de acuerdo en qué pasa si los dos sacamos el mismo número. Igualmente, analicemos juntos todas las posibilidades

Los posibles resultados son 36. Para cada uno de los posibles números que yo saque, usted tiene seis posibles números también. En total, son 36.

¿Cuáles son? Escribo primero el resultado que obtengo yo, y después usted.

> 1-1, 1-2, 1-3, 1-4, 1-5, 1-6
>
> 2-1, 2-2, 2-3, 2-4, 2-5, 2-6
>
> 3-1, 3-2, 3-3, 3-4, 3-5, 3-6
>
> 4-1, 4-2, 4-3, 4-4, 4-5, 4-6

www.elsolucionario.org

5-1, 5-2, 5-3, 5-4, 5-5, 5-6

6-1, 6-2, 6-3, 6-4, 6-5, 6-6

La primera observación es que hay seis *empates.* Es decir, el 1-1, 2-2, 3-3, 4-4, 5-5 y 6-6 no dan ningún ganador. Quedan entonces 30 posibilidades, en donde los dos números obtenidos son distintos.

De esos 30 (cuéntelos por favor), 15 lo dan como ganador a usted (son los que tienen el *segundo número* mayor estrictamente que el primero):

> 1-2, 1-3, 1-4, 1-5, 1-6, 2-3, 2-4, 2-5, 2-6, 3-4, 3-5, 3-6,
> 4-5, 4-6 y 5-6.

Por lo tanto, en los 15 restantes el ganador soy yo.

Moraleja: La probabilidad de que usted saque un número más grande que yo, es 15 / 36 = 5 / 12 = (aprox.) 0,4167, o sea 41,67% de las posibilidades.

Y lo mismo pasa con la probabilidad que yo tengo de tener un número más grande que usted.

Segunda solución

Fíjese que tirar un dado (o dos, como en este caso) es un hecho aleatorio. Asumimos que la probabilidad de que salga cualquiera de las caras es 1 / 6. Por lo tanto, si se trata de que yo tire un dado y que después usted tire otro, entonces, más allá de los *empates*, ¿no le parece razonable que ninguno de los dos tenga más chances de ganar? ¿No sería ilógico que por el hecho de tirar primero me diera una ventaja a mí? O lo que es lo mismo, ¿no sería irrazonable que tuviera ventaja usted por el solo hecho de tirar después?

En definitiva, *arrojar cada dado* es un hecho independiente. De los 36 casos posibles, *seis* son empates. Quedan 30 posibles pares en donde los dos números que aparecen son *distintos.* La mitad (15) de ellos *tienen* que

consagrarlo ganador a usted, y la otra mitad (los otros 15) me *tienen que* garantizar el triunfo a mí.

Entonces, como los posibles resultados son 36, y cada uno de los dos tiene a favor 15 de ellos, la probabilidad resulta ser: 15 / 36 = 5 / 12 para cada uno.

Como usted advierte, las dos soluciones llegan al mismo resultado. La diferencia es que la segunda *no involucra* contar los casos, sino que apela a *razonar sobre las distintas posibilidades.*

www.elsolucionario.org

Un seis o ningún seis

Lo que sigue es un hecho curiosísimo que sucede con los dados y las probabilidades.

Suponga que usted tiene cinco dados de distintos colores y está a punto de jugar con un amigo sobre quién paga las entradas para el cine.

Uno de ellos dice: «Si tiramos los cinco dados y sale *exactamente* un número seis, entonces gano yo. En cambio, si *no sale ningún seis,* ganás vos». El que pierde, paga las entradas.

¿Quién de los dos tiene más posibilidades de ganar? Es decir, ¿qué es más probable que suceda: que salga solamente un seis o que no salga ninguno?

Ahora le toca a usted.

Solución

Antes de avanzar, pongámonos de acuerdo en cómo se calcula la probabilidad de que salga *un* seis al tirar *un solo* dado: hay *un solo caso* favorable sobre *seis* posibles. Es decir, la probabilidad de que salga un *seis* es 1 / 6.

Por otro lado, la probabilidad de que *no salga un seis,* es 5 / 6, ya que hay cinco casos favorables sobre seis posibles.

Dicho esto, si uno tirara *dos dados de distintos colores*, la probabilidad de que *no salga ningún seis,* es 25 / 36, o lo que es lo mismo $(5 / 6)^2$, porque hay 25 casos favorables y 36 posibles**[78]**.

De la misma forma, si uno tirara *tres dados de distintos colores*, la probabilidad de que no salga ningún seis es $(5 / 6)^3 = 125/216$, y por lo tanto $(5 / 6)^4 = 625 / 1.296$ es la probabilidad de que no salga ningún seis al tirar cuatro dados; finalmente, $(5 / 6)^5 = 3.125 / 7.776 =$ (aprox.) 0,4019 (o sea, un poco más de un 40%) mide la probabilidad de que no salga ningún seis al tirar cinco dados. En el último caso, porque hay 3.125 situaciones favorables (ningún seis en cinco dados) y 7.776 los posibles.

Moraleja: La probabilidad de que *no salga* ningún seis es $(5 / 6)^5$. (*)

En consecuencia, lo que queda, es evaluar cuál es la probabilidad de que salga *exactamente* un seis. Para calcularla, voy a hacer lo siguiente: primero, voy a separar uno de los dados (cualquiera de ellos). Voy a calcular la probabilidad de que *ése sea el que tenga el seis y de que los otros cuatro dados tengan cualquier otro número que* ***no sea un seis***.

a) $1 / 6$ mide la probabilidad de que en el dado que elegí salga un seis.
b) $(5 / 6)^4$ mide la probabilidad de que en los otros cuatro dados *no salga un seis.*

Luego $(1 / 6) \times (5 / 6)^4$ es la probabilidad de que sucedan ambas cosas (ya que son sucesos independientes).

Sin embargo, esta situación tengo que repetirla para *cada uno de los cinco dados:* separarlo y calcular la probabilidad de que salga un seis y que en los otros cuatro *no.*

Luego tengo que sumar estas cinco situaciones, lo que resulta en:

> “
> $5 \times (1 / 6) \times (5 / 6)^4$

Es interesante notar que este número es *igual* a $(5 / 6) \times (5 / 6)^4 = (5 / 6)^5$. (**)

Luego, comparando los dos resultados obtenidos en (*) y (**), descubrimos que las probabilidades que queríamos calcular ¡son iguales!

www.elsolucionario.org

Es decir, da lo mismo calcular la probabilidad de que *no salga un seis* al tirar cinco dados, que la probabilidad de que salga *exactamente un seis.*

Por lo tanto, los amigos pueden confiar tranquilos en que ninguno de los dos tiene ventaja si deciden quien paga las entradas usando este método. ¿Bonito no? Y quizás inesperado… ¿qué dice usted?

Probabilidad de tener dos reyes del mismo color

Supongamos que uno tiene los cuatro reyes de las cartas francesas: diamante, corazón, trébol y pica. Los dos primeros son rojos. Los dos últimos, negros.

Si uno elige dos de los cuatro, sin mirar, ¿cuál es la probabilidad de que haya dos del mismo color?

En realidad, uno está tentado en decir que la probabilidad es 1 / 2, teniendo en cuenta que parecería haber las mismas oportunidades de tener dos de igual que de distinto color.

Sin embargo, esa respuesta es incorrecta. ¿Por qué?

Respuesta

Voy a llamar R1, R2 a los dos reyes rojos, y N1, N2 a los dos reyes negros.

Quiero enumerar todas las posibles parejas de reyes que pueda elegir:

> R1, R2
>
> R1, N1
>
> R1, N2
>
> R2, N1
>
> R2, N2
>
> N1, N2

www.elsolucionario.org

Es decir, hay *seis* posibles elecciones. De las seis, sólo R1, R2 y N1, N2 son del mismo color. Las restantes cuatro son de colores diferentes.

En consecuencia, la *probabilidad* de que al elegir dos reyes, los dos sean de diferente color es 4 / 6 = 2 / 3.

Luego, la probabilidad de que los dos reyes *sean del mismo color* es:

> “
> 1 – 2 / 3 = 1 / 3.

Por lo tanto, si bien la percepción original parecía inducirnos a pensar que esta probabilidad era 1 / 2, acabamos de demostrar que en realidad es 1 / 3, que es un número bastante más chico.

Cuerdas que se cruzan

Le propongo que piense en este problema que, en principio, pareciera tener una respuesta muy complicada y, sin embargo, no es así. Justamente, es el tipo de situaciones que más me gusta enfrentar, porque uno decididamente aprende el tener que «mirar» las cosas con una perspectiva diferente.

Suponga que tiene dibujado un círculo C. Elija dos puntos cualesquiera en la circunferencia. Trace un segmento que los una (lo que se llama una «cuerda»).

Ahora, elija otro par de puntos cualesquiera en la misma circunferencia. Una vez más, trace la cuerda que los une.

La pregunta es: ¿cuál es la probabilidad de que los dos segmentos se corten «dentro» del círculo C?

Así como está planteado, parecería como que es imposible de responder, ¿no le parece? Sin embargo, dedíquele un rato y verá que se puede encontrar una forma de *pensar o modelar el problema* de manera tal de poder encontrar una respuesta.

Solución

Le propongo que hagamos lo siguiente: elijamos *primero* los cuatro puntos sobre la circunferencia.

Tracemos ahora los seis segmentos que unen esos puntos (ver figura 1).

www.elsolucionario.org

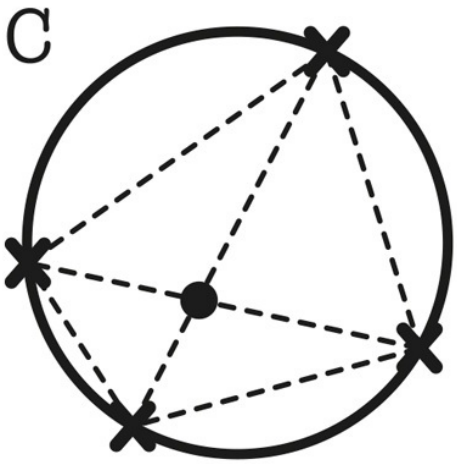


Fig. 1

Cuente ahora cuántos de esos segmentos se cortan dentro del círculo C. Verá que son solamente dos (ver figura 2).

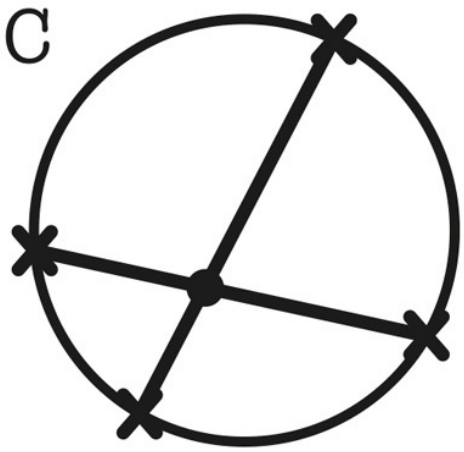


Fig. 2

Por lo tanto, la probabilidad que buscábamos al principio la podemos calcular dividiendo los «casos favorables» (que las cuerdas se corten dentro del círculo) por los «casos posibles» (todas las posibles cuerdas que se puedan trazar entre los cuatro puntos).

Ese resultado es 2 / 6 = 1 / 3.

Moraleja: La probabilidad de que se corten es 1 / 3. ¿Bonito, no? E inesperado también, al menos para mí.

4. MISCELÁNEAS, JUEGOS, INTUICIÓN

www.elsolucionario.org

¿Quién suma 15 primero?

Le propongo un juego para que lo haga con sus amigos. Hacen falta dos personas con ganas de pensar algo muy sencillo.

Se tienen los primeros nueve números naturales: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9.

El juego consiste en ir eligiendo un número cada uno entre esos nueve, sin repetir. El primero que puede sumar 15 usando tres de los números que eligió gana el juego[79].

Por supuesto, uno puede jugar libremente y sin demasiada preocupación, pero lo interesante es poder contestar esta pregunta: ¿es posible encontrar alguna estrategia de manera tal de que quien empieza primero *gane siempre*?

Fíjese, entonces, que más allá de entretenerse jugando, el verdadero objetivo es ser capaz de buscar (y eventualmente encontrar o demostrar que no existe) una estrategia que a uno le permita o bien ganar siempre, o al menos, *no perder*.

Eso es lo que transforma este tipo de situaciones en algo más que juegos para entretenerse.

Solución

Una forma de pensar este problema es ligándolo con lo que se llaman «cuadrados mágicos»[80] y el «ta-te-ti».

Si uno *construye* el siguiente cuadrado:

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Fig. 1

Es fácil comprobar que es un *cuadrado mágico* en el sentido de que las *tres filas, las tres columnas y las dos diagonales*, suman lo mismo: 15.

Ahora la/lo invito a reflexionar por un instante en el «ta-te-ti»[81]. Si el que empieza el juego elige el cuadradito del centro, puede garantizar que *no va a perder*. No significa que vaya a ganar, pero seguro que no va a perder (si juega bien). Por otro lado, el segundo jugador *no debe* elegir ninguna de las cuatro posiciones en donde figuran las cruces (ver figura 2). Si lo hace, el que jugó primero (si juega bien, claro está) gana seguro.

	x	
x		x
	x	

Fig. 2

¿Cómo usar ahora el cuadrado mágico de la figura 1 y combinarlo con el «ta-te-ti»?

www.elsolucionario.org

Supongamos que yo empiezo primero y elijo el cuadrado del medio (en donde está el número 5). Si usted eligiera cualquiera de los que están en la figura 2 (o sea, el 1, el 3, el 7 o el 9), entonces, como en el ta-te-ti, yo gano seguro. ¿Por qué? (¿No lo quiere pensar usted?).

Comprobémoslo juntos con un ejemplo. Supongamos que usted elige el 7.

O sea, yo tengo el 5 y usted eligió el 7.

Ahora, como en el ta-te-ti, yo elijo el 8. Yo ya sumé 13, pero si usted piensa en el ta-te-ti, es como si hasta acá el juego estuviera en esta posición (en donde yo uso los «círculos» y usted las «cruces»):

O		
	O	X

Fig. 3

A usted no le queda más remedio que *elegir el número «2»*. Es que como yo ya sumé 13 entre mis dos números (el 8 y el 5), usted quiere evitar que yo pueda elegir el 2 para completar 15, y entonces, me quita esa posibilidad. Ahora el juego está así:

Usted eligió: 7 y 2.

Y yo elegí: 5 y 8.

En el tablero del ta-te-ti, esto se traduce en esta figura:

o		
	o	x
		x

Fig. 4

Ahora me toca a mí, y para evitar que usted gane, yo tomo el cuadradito de arriba a la derecha (en donde figura el número 6).

Yo tengo: 5, 8 y 6.

Usted tiene: 7 y 2.

o		o
	o	x
		x

Fig. 5

Si usted se detiene a mirar la figura 5, verá que *inexorablemente* yo le voy a ganar (al «ta-te-ti») porque si usted elige obstaculizarme la primera fila tomando el cuadradito del medio, yo voy a completar la diagonal con el cuadradito de abajo a la izquierda. O al revés (o sea, si usted elige el del medio en la primera fila, yo elijo el de abajo en la primera columna).

www.elsolucionario.org

Traducido en los términos del cuadrado mágico, si usted elige el 4, yo elijo, como paso siguiente, el 1 y tendríamos así:

Usted: 7, 2, 4.

Yo: 5, 8 y 6… pero en el próximo, como yo elegiría el «1», tendría: 8, 1, 6 entre mis cuatro números, y eso termina el juego.

Siguiendo este camino, le propongo que usted haga los casos que faltan considerar, de manera tal de convencerse de que *no hay una estrategia ganadora para quien empieza primero*, pero existe una forma en la que *no pierde nunca.*

Moraleja

Si bien este parece un juego inocente (y de hecho lo es), también es verdad que la combinación de ciertos recursos elementales («ta-te-ti», cuadrados mágicos) permite *demostrar* que *no hay estrategia ganadora posible.*

La habilidad para poder decidir en qué situaciones este tipo de estrategias existen o no, permite entrenarse para tomar decisiones más educadas en la vida cotidiana. Éste es (o fue) un problema más que apunta en esa dirección.

¿Cómo evaluar la pérdida?

El siguiente problema tiene una solución muy sencilla. El desafío es *encontrar el camino* para advertir cuán fácil es. Y eso es lo que me motiva a escribir sobre él. Léalo con detenimiento, y disfrute de encontrar la respuesta.

Acá va.

Un joven armaba computadoras en su casa y tenía un negocio en donde las ofrecía a la venta. Las vendía a $ 1.500.

En una oportunidad, un cliente a punto de llevarse una, le dice que no tiene dinero en efectivo y le propone darle un cheque por $ 2.500. El fabricante recurre a un vecino y le pide que le canjee el cheque, de manera tal de poder entregarle el vuelto al cliente y no perder la operación.

El vecino le entrega el dinero (los $ 2.500) y se queda con el cheque. El joven vuelve a su negocio y le entrega a su cliente $ 1.000 que corresponden al vuelto y, por supuesto, le entrega la computadora.

Dos días después, el vecino le advierte que el cheque vino «rebotado». Como el fabricante de computadoras no tenía suficiente dinero para reponerle al vecino, recurre a un amigo que le presta los $ 2.500, con lo que el problema (para el vecino) queda solucionado.

La pregunta es: «Si el costo de fabricar cada computadora es de $ 1.000, ¿cuánto dinero perdió efectivamente el joven?».

En este momento, quiero hacerle una sugerencia: tómese tiempo. El problema es *genuinamente* muy sencillo. La dificultad —si es que usted llegara a tener alguna dificultad— tiene que ver con nuestra propia forma de *distorsionar* lo evidente. Es decir: si a usted le pasa lo que me pasó a mí, verá que uno *se*

www.elsolucionario.org

resiste a pensarlo de forma directa, y le busca una vuelta que el problema no tiene.

Ahora, lo único que me queda por sugerir es que «lo disfrute» (me refiero al problema).

Solución

Me consta que mucha gente intentó responder la pregunta de múltiples formas. ¿A qué número llegó usted? ¿Cuánto cree que fue el dinero que perdió el joven?

En todo caso, me gustaría que recorramos un camino juntos. ¿Cuánto PUDO haber perdido? ¿Quién fue la única persona que le *robó* algo? Claramente, ninguna de las dos personas a las que le pidió dinero. Ellos, en todo caso, lo ayudaron. El único que se *escapó* con la computadora y pagó con un cheque sin fondos fue el cliente que había entrado en su negocio.

Haga el cálculo de cuánto dinero se llevó el cliente, notando que la computadora, DE COSTO, salía $ 1.000. Esa cantidad, la perdió seguro. Y, además, el hombre se llevó $ 1.000 en efectivo que el dueño le había dado como compensación para cubrir el total del cheque.

Es decir, quien se llevó la computadora, se *escapó* con $ 2.000. ¡Y punto! No hay ningún otro dinero que pudiera haber perdido el joven que las fabricaba. En todo caso, uno podría argumentar que *perdió de GANAR* los $ 500, pero ése nunca fue dinero suyo, por lo que, en realidad, nunca lo pudo perder.

Por lo tanto, el total del dinero perdido es de $ 2.000.

Otra forma de mirarlo. ¿Cómo se complicó usted al buscar la respuesta? ¿Llevó la cuenta del dinero que recibió del vecino y del amigo? Lo curioso e interesante al mismo tiempo es que todas esas operaciones *distraen* del problema propiamente dicho. Como el único que *robó* algo fue el cliente que se llevó la computadora, entonces, *todo lo que uno tiene que hacer* es evaluar cuánto dinero se llevó. Y ese número es $ 2.000 porque se llevó una computadora sin pagar (que sale $ 1.000) y el dinero en efectivo, otros $ 1.000. Luego, el *total* de la pérdida es $ 2.000.

Al vecino, no le debe nada (ya le pagó con el dinero del amigo). Al amigo, le debe $ 2.500. De ellos, $ 1.000 tiene que ponerlos de su bolsillo y $ 1.500 son los que le dio el vecino (de los cuales, $ 500 son la *potencial ganancia* y $ 1.000 son del costo de la computadora). Así que perdió en total $ 2.000.

www.elsolucionario.org

¿Cuánto debería salir una pizza?

Imagine la siguiente situación. Usted está acostumbrado a comer pizza cerca de su casa. La pizzería de su barrio, vende pizzas «circulares» y las ofrece en diferentes tamaños (o sea, varían los diámetros).

Si la pizza que tiene 10 centímetros de diámetro se vende a $ 10, ¿cuánto debería costar la misma pizza pero cuyo diámetro es de 20 centímetros[82]?

Solución

Como la superficie de un círculo es $\pi \times (\text{radio})^2$, entonces, por un lado, se sabe que $\pi \times (5)^2 = 20$ (que es el costo de la pizza de 10 centímetros de diámetro, o sea, que tiene 5 centímetros de radio).

Por otro lado, la pizza que tiene *doble* de diámetro debería costar $\pi \times (10)^2$. Pero como uno sabe que $\pi \times (5)^2 = 20$, y $\pi \times (10)^2 = \pi \times (5 \times 2)^2 = \pi \times (5)^2 \times 2^2 = 20 \times 2^2 = 80$, o sea, el costo se CUADRUPLICA y no DUPLICA…

Moraleja: Cuando uno duplica LINEALMENTE, cuadruplica la superficie (y de ahí que el costo se cuadruplique también).

Problema extra: Si uno supiera que el precio de una naranja es de $ 2 si tiene 5 cm de diámetro, ¿cuánto debería costar si tuviera un diámetro de 10 cm?

La/lo invito a que piense la solución por sus propios medios, pero verá que ahora, al tratarse de un objeto en tres dimensiones (la naranja), el volumen en lugar de cuadruplicarse como en el caso de la pizza, ahora se *octuplica*[83]. Por lo tanto, el precio de la «nueva» naranja tendría que ser $ 16[84].

Tres alternativas y la moneda cargada

Cuando uno tiene que optar entre *dos alternativas*, en general, suele apelar a una moneda. «La tira al aire y de acuerdo con que salga cara (C) o ceca (X), toma una decisión»[85].

Éste es el caso más sencillo. Acá (y ahora) quiero plantear una situación parecida, pero no exactamente igual.

Supongamos que uno tiene que elegir entre tres alternativas (tres casas, tres autos, tres películas… lo que usted quiera) y tiene una moneda.

Tengo dos preguntas para hacer:

a) ¿Cómo hace para decidir con igual probabilidad con cuál de las tres quedarse?

b) ¿Y si supiera que la moneda está «cargada»? Es decir, si uno supiera que con la moneda no sale con igual probabilidad «cara» que «ceca»… ¿qué hacer entonces? ¿Se puede encontrar una estrategia de manera tal de poder decidir con igual probabilidad cuál de las tres alternativas elegir?

Como siempre, la invitación es a pensar qué se podría hacer. En la solución hay una «potencial» respuesta.

Solución

Caso a:

www.elsolucionario.org

Como usted imagina (y ya debe de haber probado por su cuenta), «tirar» la moneda *una sola vez* no resolverá el problema. Es fácil entender que no se puede usar la opción de que «la moneda caiga de canto». Es que no serían igualmente probables los tres estados: cara, ceca y «canto».

Sin embargo, más allá de la broma, como es evidente, no alcanza con tirar la moneda una sola vez. Hará falta alguna otra idea. En principio, entonces, sugiero explorar lo que pasaría si la «tiramos» al aire *dos* veces.

En este caso, las alternativas son[86]:

a) CC
b) CX
c) XC
d) XX

La probabilidad de que salga cualquier par es la misma para todos. Es decir, que salga CC (o sea, dos caras seguidas) es 1 / 4. Lo mismo con cualquiera de las otras alternativas. Todas tienen probabilidad 1 / 4 de aparecer.

¿Cómo hacer, entonces, para decidir entre los tres objetos que uno tenía al principio? Para fijar las ideas, supongamos que hay que optar por uno entre tres colores: Blanco, Rojo y Negro.

Así, uno dice: si sale CC, elijo Blanco, si sale CX elijo Rojo y si sale XC elijo Negro.

¿Y si sale XX? En ese caso, empiezo el proceso nuevamente hasta que aparezca una de las tres posibilidades que escribí recién.

Esto soluciona el problema de forma bien equitativa y es una manera de elegir con igual probabilidad cualquiera de las tres opciones.

Caso b:

Ahora sabemos que la moneda está «cargada». ¿Qué quiero decir con esto? Esto quiere decir que la probabilidad de que salga C o X no es la misma. Digamos que la probabilidad de que salga C (cara) es p y la probabilidad de que salga X (ceca) es q.

Lo que sí se sabe es que:

> $p + q = 1$

Si la moneda no estuviera «cargada», esto diría que $p = q = 1 / 2$. O sea, la probabilidad de que saliera cara o ceca sería la misma: 1 / 2.

Pero como eso ahora ya no se sabe, lo más que podemos decir es que la *suma de las dos probabilidades (p y q)* ***tiene*** que ser 1, porque o bien sale cara o bien sale ceca. No hay otras alternativas.

Dicho esto, le quiero proponer pensar lo siguiente.

La probabilidad de que salga C es *p*.

La probabilidad de que salga X es *q*.

¿Y la probabilidad de que salga CC? (Piense usted por su cuenta por un momento).

La probabilidad de que salga CC es entonces:

> $p \times p = p^2$

Por otro lado, la probabilidad de que salga CX es:

> $p \times q = p \times q$

La probabilidad de que salga XC es entonces:

> $q \times p = q \times p$

Y por último, la probabilidad de que salga XX es:

www.elsolucionario.org

> $q \times q = q^2$

Dicho esto, ahora podemos calcular las probabilidades (y la/lo invito a que lo haga):

a) XXCC
b) XCXC
c) XCCX
d) CXXC (*)
e) CXCX
f) CCXX

Fíjese que estas probabilidades se pueden calcular *multiplicando* la probabilidad de que suceda cada *evento* por separado. Es decir, que salga X la primera vez que uno tira la moneda (es *q)* es independiente de lo que suceda cuando yo tire la moneda la segunda o la tercera vez, o incluso en la cuarta ocasión. Son todos *acontecimientos o eventos independientes.*

Luego, la probabilidad de que salga —como dice en la parte (a)— XXCC se obtiene multiplicando

> $q \times q \times p \times p = (q \times p)^2$

Pero como tanto en (a), (b), (c), (d), (e) y (f) aparecen dos caras y dos cecas, entonces las probabilidades de que sucedan esos hechos (la distribución en dos caras y dos cecas en cada caso) son *¡la misma probabilidad!* O sea, en *todos* los casos, la probabilidad es $(q \times p)^2$.

Los casos (a) hasta (f) que figuran en (*) son *todos* los posibles que involucran *dos caras y dos cecas.* En cambio, si uno quisiera calcular la probabilidad de cualquier otra elección de caras y cecas (de manera tal de que haya o bien más caras que 2 o más cecas que 2) la probabilidad ya no va a ser la misma[87].

Para terminar de resolver el problema, basta elegir *tres* de los seis posibles casos que aparecen en (*) y decidir, para cada uno de ellos, qué color elijo.

Por ejemplo, uno podría decir:

> Si sale XXCC elijo Blanco
>
> Si sale XCXC elijo Rojo (**)
>
> Si sale XCCX elijo Negro

Si sale cualquier otra combinación, la desecho y se tira de nuevo hasta que aparezca alguna de las tres que figuran en (**).

Moraleja: De esta forma, le adjudico un color a cada una de las tres alternativas que planteé, y así tengo la garantía de que son todas igualmente probables (o dicho de otro modo, *equiprobables).*

www.elsolucionario.org

¿Cómo elegir y sortear entre 17 personas?[88]

Suponga que uno está en una fiesta, en un cumpleaños, en una reunión de cualquier tipo, y se plantea la necesidad de «sortear» algún objeto. Y son 17 personas. ¿Cómo hacer?

Por supuesto, uno podría «escribir un papelito» con el nombre de cada una de las personas que están involucradas, ponerlos en una caja o una bolsa, mezclar bien y extraer uno de ellos. Supongo que ésa es la manera más común de resolver el problema. Pero, por supuesto, podría suceder que no hubiera suficiente papel o que no hubiera con qué anotar, o bien uno podría *no tener ganas* de escribir todos esos papeles.

En ese caso, la/lo invito a que establezca usted alguna estrategia que permita resolver la situación en forma justa. Es decir, encontrar una manera que seleccione una de las 17 personas al azar y que no haya ventajas para ninguno de los que participan.

Obviamente, no tiene sentido aspirar a que haya una *única* solución a este problema, sino que la idea es poder *pensar* diferentes formas de hacer el sorteo y proponer alguna idea que lo consiga en forma equitativa. Y, por supuesto, *usar* la matemática como aliada[89].

Solución propuesta

Voy a proponer una estrategia posible, con la ayuda de la matemática. Estoy seguro de que debe haber ideas más sencillas y más seductoras o más entretenidas, pero yo quiero exhibir una relacionada con la aritmética. Acá va.

Para empezar, tengo una pregunta para formularle: si usted divide un número por 5, ¿cuánto puede sobrarle? Es decir, tomemos por ejemplo el número 8. Si usted lo divide por 5, el resultado es 1, pero le sobran 3. Es decir, el *resto* de dividir 8 por 5, resulta ser el número 3.

Si usted divide al número 134 por 5, se obtiene 26, y le *sobran* 4. Escribí esto para que nos pusiéramos de acuerdo, usted y yo, a qué me refiero cuando hablo de *resto.* Otro ejemplo más: si uno divide 71 por 5, el resultado es 14 y el *resto* es 1. Pregunta: al dividir por cinco, ¿cuántos restos posibles hay? (La/lo invito a que piense antes de contestar…).

Sigo yo: los *únicos restos posibles,* al dividir un número por 5, son 0, 1, 2, 3 y 4. Lo mismo sucede si usted divide un número por 7. Los únicos restos posibles son 0, 1, 2, 3, 4, 5 y 6.

Dicho esto, y haciendo la *generalización inevitable,* si uno tuviera que dividir un número por 17, ¿cuántos restos posibles puede encontrar?

Como usted advierte, hay *exactamente 17 restos posibles*:

> 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 y 16

Con estos restos que usted acaba de leer (que son justo 17) y teniendo 17 personas entre las que hay que sortear algo, ¿no está tentada/tentado de pensar usted cómo elaborar una estrategia para hacer el sorteo que nos interesaba?

¿Qué le parece esto que le voy a proponer yo? Cada uno de los presentes, elige un número cualquiera entre 0 y 16 (sin repeticiones, claro está). Como vimos recién, esto significa haber elegido *todos (y cada uno) de todos los posibles restos al dividir algún número por 17*.

En principio, no hay ninguna razón que haga que alguno de ellos sea más *probable que otro.* Es decir, bastará con elegir un número al azar cualquiera, dividirlo por 17, y fijarse en el resto. La persona que tenga *ese número* será la ganadora del sorteo.

Todo se reduce ahora a buscar un número al azar. Eso uno lo puede conseguir pidiéndole a cualquiera de los participantes, que saque un billete cualquiera que tenga en la cartera o en un bolsillo, fijarse en el número de serie que todos

www.elsolucionario.org

tienen asignados, dividirlo por 17, fijarse en el resto y de esa forma, queda *seleccionada **una** de las personas*, como queríamos hacer al principio. O hacer lo mismo con el DNI (o documento de identidad de cualquiera de los presentes).

Preguntas

1) ¿Quién tiene paciencia para hacer una división por 17?

   Respuesta: Posiblemente nadie, si uno la tiene que hacer a mano. Es preferible escribir los nombres en papelitos, como habíamos descartado al principio. Sin embargo, creo que no es muy difícil imaginar que entre las 17 personas alguno tendrá acceso a una calculadora.

2) Sin embargo, cuando uno divide un número por 17 (aun con la ayuda de una calculadora), el resultado que aparece en la pantalla *no ofrece el resto, sino que aparece un número con decimales.* Por ejemplo, si usted divide 123.456.789 por 17, obtiene

   > 7.262.164,0588…

   ¿Qué hacer en este caso? ¿Cómo encuentra el resto? Lo que uno tiene que hacer es *multiplicar por 17* el número que aparece después de la «coma» (en este caso 0,0588) y se obtiene 0,9996 que es *casi 1*, por lo que el *resto* en este caso es igual a 1[90].

Otro ejemplo: Una vez que uno distribuyó los números entre 0 y 16, elige el DNI de una de las personas que es: 23.479.812. ¿Quién sale sorteado en ese caso?

Si uno hace la división de 23.479.812 por 17, obtiene 1.381.165,4117… En esta situación, para *descubrir el resto* multiplico 0,4117 por 17 y el resultado es: 6,9989 que es *casi* 7, por lo que el resto en este caso es igual a 7.

3) ¿Y si en lugar de haber habido 17 personas hubiera habido 143? ¿Qué hacer?

> Respuesta: Lo mismo que recién con el número 17. Cada uno elegirá un número entre 0 y 142, se buscará el número de serie de un billete cualquiera, se lo divide por 143 y el resto de esa división sirve para elegir qué persona gana el sorteo.

Es decir, este método sirve para CUALQUIER número de personas y, aunque escribir «papelitos» no es muy complicado (ni tan tedioso) en un grupo de 17 personas, si ya tuviera que escribir 143 papelitos (o más) creo que empezaría a apreciar un poco mejor el método que propuse.

www.elsolucionario.org

No tan rápido…

Le propongo ahora que por un rato se transforme en una suerte de «detective matemático». Es decir: yo le voy a ofrecer algunos datos (que usted podrá comprobar por su cuenta) y en función de lo que allí se vea, le voy a pedir que saque una conclusión.

Eso sí: tenga a mano un papel y algo con qué escribir o dibujar. De esa forma será más fácil visualizar los datos.

Tomemos un círculo cualquiera, no importa el tamaño. Marque un punto en la circunferencia (o sea, en el borde del círculo)[91]. ¿En cuántas regiones queda *dividido* el círculo? Parece una pregunta sin sentido, porque… ¿de qué regiones podría estar hablando yo? Bueno, *marcar* un punto en el borde *deja el círculo como estaba antes.* O sea, hay *una sola región*, como había antes de señalar ese punto.

Sin embargo, si ahora yo le digo que marque *dos puntos* en la circunferencia (digamos A y B), y le pidiera que trace el segmento que los une, ahora *sí* el círculo queda dividido en *dos regiones.* Pongámosle un número a cada una de esas regiones: 1 y 2.

Marque un *tercer punto* en la circunferencia. Quedan designados A, B y C (ver figura 1). Si trazamos los tres segmentos que los unen, ¿en cuántas regiones queda dividido el círculo? Como se ve en la figura 2, ahora hay *cuatro* regiones: 1, 2, 3 y 4.

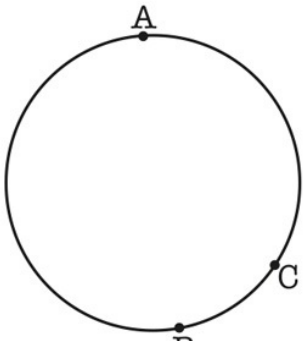


Fig. 1

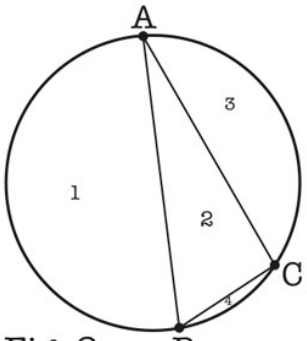


Fig. 2

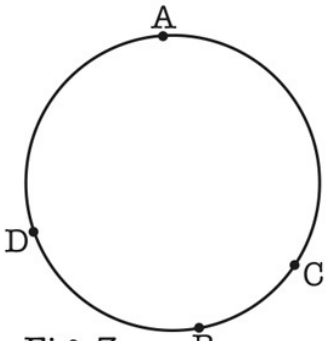


Fig. 3

Avancemos un paso más. Agregue un cuarto punto a la circunferencia. Ahora tenemos A, B, C y D (ver figura 3). Una vez más, trace los *seis* segmentos que unen los cuatro puntos. Como usted puede advertir, ahora el círculo queda dividido en *ocho regiones* (ver figura 4).

Si agrega un quinto punto, que llamamos E, ahora se pueden trazar *diez* segmentos que los unen. En este caso, uno puede registrar que el círculo queda dividido en *16 regiones* (ver figura 5).

Y acá quiero parar por un instante y resumir lo que hemos detectado.

> Con *un punto* en la circunferencia, el círculo queda *dividido* en *una* región.
>
> Con *dos puntos* en la circunferencia, el círculo queda *dividido* en *dos* regiones.
>
> Con *tres puntos* en la circunferencia, el círculo queda *dividido* en *cuatro* regiones.

www.elsolucionario.org

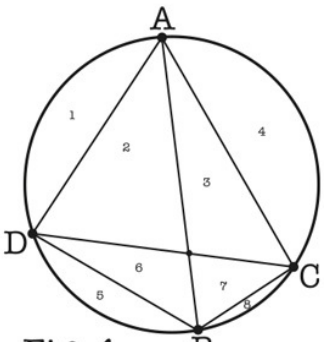


Fig. 4

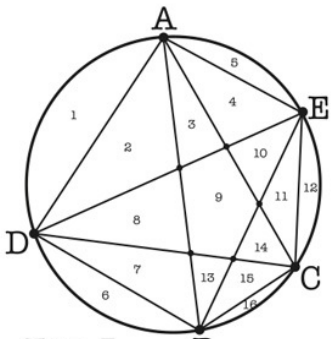


Fig. 5

> Con *cuatro puntos* en la circunferencia, el círculo queda *dividido* en *ocho* regiones.
>
> Con *cinco puntos* en la circunferencia, el círculo queda *dividido* en *dieciséis* regiones.

Pregunta: con estos datos, si uno marcara un *sexto punto* en la circunferencia y trazara *todos* los posibles segmentos que los unan… ¿en cuántas regiones quedará dividido el círculo?

Le toca a usted ahora funcionar como *detective* y tratar de inferir la respuesta.

Solución

La tentación —naturalmente— es *extrapolar* los datos que uno tiene y concluir que si uno agrega un *sexto* punto, el número de regiones en las que quedaría dividido el círculo es 32. ¿Por qué? Porque cada vez que fuimos agregando un punto y trazábamos todos los segmentos que los unían, obteníamos *el doble* de las regiones que había en el paso anterior.

Por lo tanto, si con *cinco puntos* quedan determinadas 16 regiones, uno *infiere* que con *seis puntos* deberían emerger 32. Sin embargo, si usted intentó hacer el dibujo correspondiente, se tropezó con un problema: ¡no puede encontrar la región número 32! ¿No le pasó eso? (ver figura 6).

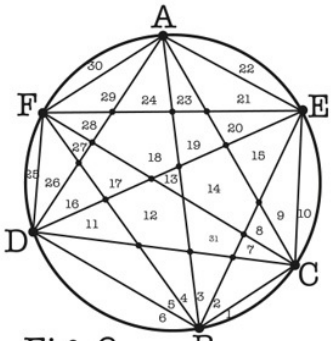


Fig. 6

Es que por más vuelta que uno le dé, *¡no hay caso! ¡No hay región número 32!*

Quedan determinadas 31, y no hay nada que hacer. Más aún: si uno sigue agregando puntos a la circunferencia y trazando los segmentos que los unen, el número de regiones que se obtienen ya no tiene nada que ver con lo que uno podía intuir en principio. Fíjese en esta secuencia:

Número de puntos	Número de regiones
1	1
2	2
3	4
4	8
5	16
Pero a partir de acá…	
6	*31*
7	*57*
8	*99*
9	*163*
10	*256*

Lo interesante de este ejemplo es que muchas veces uno *tiende a sacar conclusiones muy rápidas* en función de los datos que tiene, y, justamente, muchas veces también, esos datos que uno cree suficientes para poder *inferir*… no alcanzan en esa oportunidad.

La moraleja de esta historia es que por más que uno haya intentado con algunos casos (o muchos casos incluso), es necesario tener una *demostración*

www.elsolucionario.org

general que quite las dudas.

Es bien cierto que cuando uno quiere conjeturar un resultado es bueno empezar con situaciones más manejables y con números más pequeños. Muchas veces, *ésa* es la manera de *imaginar* un resultado. Pero de la *conjetura* a la *demostración,* hay un paso insoslayable. Es decir, lo que sucede para números «*chicos*» no necesariamente se puede extrapolar para números *cualesquiera.* Y algunas veces, *la intuición… falla.*

Arrancando páginas sucesivas de un libro

Suponga que usted arranca una cantidad de páginas sucesivas de un libro. El número que figuraba en la primera de las páginas que arrancó era 183 y cuando le pregunté cuántas páginas se llevó, usted no recordaba bien, salvo que la última tenía los mismos dígitos que la primera (183), *¡pero en diferente orden!*

¿Alcanza con estos datos para saber cuántas y cuáles fueron las páginas que usted se llevó?

Solución

Cada hoja de un libro contiene una página par y otra impar. Al abrir cualquier libro, las páginas impares están a la derecha y las pares, a la izquierda.

Dicho esto, todo libro tiene (contando las tapas o no) un número *par* de páginas. Es decir, cuando usted «arrancó» una parte del libro (cortando en este caso páginas sucesivas), usted se tuvo que haber llevado un número par de ellas.

La primera fue 183, y si bien usted no recuerda cuál era el número de la última página que se llevó, ésta tuvo que haber sido una página par.

De todas las posibles combinaciones que se pueden hacer con los dígitos 1, 8 y 3, hay solamente dos que terminan en 8: 138 y 318.

La última página *no pudo* haber sido 138, porque la primera era 183. Por lo tanto, no queda más alternativa que inferir que la última página *tuvo* que ser 318.

www.elsolucionario.org

Con estos dos datos —número de la página inicial (183) y número de la página final (318)— ahora debería ser fácil deducir cuántas páginas fueron arrancadas del libro. ¿Quiere pensar usted? Fíjese que si usted *resta* 318 menos 183, se obtiene:

> 318 – 183 = 135

y esto no puede ser, porque entonces faltaría un número *impar* de páginas. ¿En dónde está la dificultad? Es que al restar 183, es como si uno estuviera «dejando» en el libro las primeras 183 páginas, y eso no es cierto, porque la página 183 fue arrancada. O sea, la última página que quedó de la primera parte del libro es la 182, y por lo tanto, el cálculo que hay que hacer es: 318 – 182 = 136.

Solución: Usted arrancó en total 136 páginas del libro.

La lotería infinita

Raymond Smullyan es un matemático norteamericano que nació en Nueva York en el año 1919. Además, es concertista de piano, se dedica a la magia (como Persi Diaconis, otro matemático importante que se inició como mago) y es un especialista en lógica. Pero *su fama* proviene del volumen increíble de problemas para entrenar el pensamiento con los que roció su vida. Publicó once libros dedicados únicamente a la matemática recreativa, aunque supongo que el más conocido fue el que apareció en 1978: *¿Cuál es el nombre de este libro? (What is the name of this book?*).

Es imposible seleccionar una sola historia que haga un poco de justicia con el legado de una persona tan prolífica. Por lo tanto, cualquier elección que yo haga será tendenciosa y arbitraria, pero igualmente quiero reproducir al menos una que Smullyan publicó en 1979. La voy a llamar (de la misma forma que Ian Stewart[92]): «La lotería infinita». Y de inicio, allí aparece el primer «atentado a la intuición». Todo lo que tenga que ver con el infinito roza lo ideal. Los humanos operamos y trabajamos, en general, con conjuntos finitos, y nos cuesta extrapolar y extraer verdades en un mundo infinito, pero siempre es motivo de excitación. Acá va.

La idea es tratar de elaborar una estrategia para *ganar*. Claro, habrá que leer un poco más para saber qué quiere decir ganar dentro del contexto del juego que propone Smullyan. Ése es el desafío para usted. Vale la pena dedicarle un rato y pensar qué respuesta dar. Lo que le propongo es que se tome tiempo y no trate de contestar rápido. Uno se frustra y termina recurriendo casi inmediatamente a la página con las soluciones. Si me permite sugerirle algo, entonces, no lo haga: disfrute de tener el problema en la cabeza durante algunos días, si fuera necesario. Lo resuelva o no, verá que el tiempo que le dedica tiene mucho más valor que si lee la solución. «Se lo quita de encima». En pocas palabras: se estaría privando de poder disfrutar de algo.

www.elsolucionario.org

El problema dice lo siguiente. Supongamos que uno tiene *infinitas* bolsas. Estas bolsas están numeradas mediante una etiqueta pegada en el exterior, y la numeración es ascendente: 1, 2, 3, 4, 5… y así siguiendo indefinidamente (recuerde que son *infinitas bolsas*).

Adentro de cada bolsa hay *infinitas bolitas* identificadas con el número de cada bolsa. Por ejemplo, la que tiene el número 27 en la etiqueta, contiene adentro *infinitas* bolitas con el número 27. Y lo mismo sucede con todas las otras.

Por último, usted tiene una caja enorme, en donde podrá poner la cantidad de bolitas que quiera, pero siempre en un número *finito*[93]. Usted tendrá libertad de elegir bolitas de todas las bolsas que quiera, y tantas bolitas como quiera, pero *siempre en un número finito.*

Una vez que usted haya seleccionado las bolitas y las haya puesto en la caja, tendrá que seguir la siguiente instrucción: «Meta la mano en la caja y elija una bolita cualquiera». Por las dudas, permítame aclarar algo: usted puede «ver» la bolita que elige. No es que mete la mano en la caja y toma una sin poder saber cuál es. No. Usted puede seleccionar la bolita que quiera. Digamos entonces que usted eligió la bolita con el número 353, por poner algún ejemplo. Saque esa bolita y déjela afuera: usted podrá reemplazarla en la caja por tantas bolitas como quiera, *siempre en un número finito,* pero que tengan números *estrictamente menores que 353.* Por ejemplo, usted podrá poner 150 mil bolitas con el número siete, 230 millones de bolitas con el número 14, siete mil millones de bolitas con el número 1, y así siguiendo. Es decir, usted puede reemplazar la bolita que sacó, la que tenía el número 353 por tantas bolitas como quiera (siempre en un número finito), pero eligiéndolas de bolsas que tengan una numeración *estrictamente menor* que 353.

Una vez que haya terminado de reemplazar esa sola bolita por todas las otras, deberá repetir el proceso y volver a seleccionar una bolita, retirarla de la caja y reemplazarla (una vez más) por un número finito de bolitas que tengan una numeración *estrictamente inferior* de la que usted retiró.

Una observación: si la bolita que usted retiró está identificada con el número «1», entonces no podrá reemplazarla por bolitas de ninguna bolsa, porque no hay ninguna que tenga números inferiores a *uno.*

La pregunta ahora es la siguiente: ¿es posible elaborar una estrategia de manera tal de que este proceso continúe *indefinidamente?* Es decir, ¿es posible seleccionar de inicio bolitas en la caja, de manera tal que el proceso descripto *no termine nunca*?

Si su respuesta es afirmativa, exhiba un ejemplo de cómo elegir las bolitas y comprobar que cumpliendo con las instrucciones usted siempre tendrá bolitas en la caja para seguir sacando en forma indefinida. En cambio, si su respuesta es negativa y le parece que nunca se va a poder, entonces explique por qué.

Relea las condiciones ya descriptas hasta convencerse de que entendió bien el enunciado (que resumo acá):

a) Hay infinitas bolsas, todas numeradas, desde el 1 en adelante.
b) Cada bolsa tiene infinitas bolitas con el número que está indicado en esa bolsa.
c) Hay una caja grande, que al principio está vacía.
d) Usted tiene que empezar a poner bolitas en la caja. No importa cuántas, pero tiene que ser un número finito, y tiene que elegirlas de cualquiera de las bolsas. Usted decide cuántas pone, sin restricciones (salvo la *finitud).*
e) Una vez que eligió las bolitas y las puso en la caja, tiene que empezar a reemplazarlas una por vez.
f) Saca una, se fija en el número y la pone a un costado. La puede reemplazar con tantas bolitas como quiera, pero siempre en un número finito (aunque tan grande como usted quiera), pero ahora las bolitas *solamente las puede elegir de las bolsas que tienen un número estrictamente menor que la bolita que usted excluyó.*

Dicho todo esto, el desafío consiste en lo siguiente: ¿es capaz usted de diseñar una estrategia para elegir las bolitas de manera tal que *no se le acaben nunca las que pone en la caja?*

Como usted ve, el problema radica en pensar si es posible imaginar una estrategia que permita ir eligiendo las bolitas (con las restricciones explicadas), pero evitando que se le terminen en algún momento, algo así como que usted pueda ir «retirando» bolitas de la caja en forma indefinida.

www.elsolucionario.org

Es un buen momento para dejarla/lo en soledad para que pueda entretenerse sin intromisiones.

Solución

Curiosamente, a pesar de que uno pueda elegir la cantidad de bolitas que quiera, el hecho de que sean *finitas* impide que el proceso pueda seguir indefinidamente. Pero ¿por qué no se puede? O mejor dicho, ¿por qué no se podría elaborar una estrategia que sirva para tener *siempre* bolitas dentro de la caja?

Acompáñeme en este argumento. Supongamos que alguien ya hizo la elección de las bolitas y las tiene todas dentro de la caja. Como el número de bolitas es finito, entonces *forzosamente tiene que haber al menos alguna bolita que tenga un número que sea el* ***mayor*** *de todos los que están adentro de la caja.*

Piense bien lo que acaba de leer: si el número de bolitas fuera infinito, esto no tendría por qué ser cierto: uno podría tener bolitas con el número 1, 2, 3, 4, 5, 6, etc., pero como podría tener infinitas, no hay razón para suponer que alguna de las bolitas tiene el número mayor. Sin embargo… el hecho que sean finitas *impide* que esto sea cierto: ¡tiene que haber alguna que sea la «mayor» de todas!

Antes de avanzar en la lectura, convénzase de que entendió este último argumento. Si no, no tendrá sentido seguir leyendo, ya que el *argumento central* reside en ese hecho: de que hay alguna bolita que sea la que lleve el número mayor de todas las bolitas que están adentro de la caja.

Bien. Ahora analicemos juntos cuál puede ser ese número mayor y vayamos descartando casos.

Por ejemplo, si el número mayor entre todas las bolitas que alguien eligió en la caja es el número 1, entonces, eso quiere decir que *todas* las bolitas tienen que llevar el número 1 (ya que la mayor lleva el 1). Luego, cuando usted saca la primera bolita, esa no la puede reemplazar por ninguna otra, porque no hay bolitas que tengan números menores de *uno*. Entonces cada bolita que saca es irreemplazable. Luego, como el número de bolitas que está dentro de la caja es finito, digamos que son 350 mil millones, llegará un momento en que se le

van a acabar las bolitas para retirar. Y allí se termina el juego. Primera moraleja entonces: Si todas las bolitas llevan el número uno, es imposible que el proceso siga indefinidamente: se termina tan pronto como se acaban las bolitas con el número *uno.*

Supongamos ahora que la bolita que tiene el mayor número es el *dos.* Podría haber muchas con el número dos, y también podría haber muchas con el número uno, pero las que llevan el número dos son las mayores. ¿Qué podría pasar? Si usted empieza a sacar las que llevan el número *uno,* no las puede reemplazar como vimos antes. Si usted saca una que lleva el número *dos,* entonces sí, puede reemplazarla con tantas numeradas con el *uno* como quiera. Digamos que reemplaza una de las bolitas que tienen el número *dos,* por 700 mil billones de bolitas con el número *uno.* Todo bien, pero ahora, usted tiene en la caja muchísimas más bolitas, pero lo que importa es que hay *¡una menos de las bolitas que tenían el número dos!* O sea, si originalmente —por ejemplo— había 400 mil bolitas con el número 2, ahora, le quedan solamente 399.999. El resto son todas bolitas con el número uno. Si usted quiere, puede seguir sacando bolitas con el número uno, pero no las puede reemplazar, y si saca bolitas con el número 2, puede agregar bolitas a la caja (tantas como quiera, pero siempre un número finito), ¡pero todas llevan el número 1! Y además, se quedó con una bolita menos que tiene el número dos. Ahora le quedan 399.998.

Como usted advierte, si usted quiere sacar solamente bolitas con el número uno, puede hacerlo, pero en algún momento se le van a acabar y se verá forzado a sacar una con el número dos. Y si empieza sacando alguna que lleva el dos, las puede reemplazar con las que llevan el número 1, pero tendrá una menos que lleva el dos.

Inexorablemente, llegará un momento en que tendrá que seguir reduciendo la cantidad de números «2», y las número «1» se irán agotando con el tiempo. Moraleja: Si las bolitas que llevan el mayor número de la caja llevan el número dos, será una cuestión de tiempo hasta que se terminen todas las bolitas.

Con esta idea, ¿no le da ganas de pensar qué pasaría con los otros casos posibles? Es decir, para fijar las ideas: ¿qué pasaría si las bolitas que llevan el mayor número fueran las que tienen un número «3»? Supongamos que en la

www.elsolucionario.org

caja hay 900 millones de bolitas con el número «3», pero ninguna con número mayor, ¿qué pasaría?

Pasaría que si usted sólo saca las que llevan el número 1, se le van a agotar en algún momento y no las puede reemplazar. Si usted va sacando las que llevan el número «2», las reemplazará con las que llevan el «1», pero va teniendo menos que tienen el número «2» y, por lo tanto, se le van a agotar las que llevan el «1» y el «2». Y si empieza con las que llevan el número «3», las podrá reemplazar por números «1» y «2» tanto como quiera, pero ahora tendrá menos bolitas con el número «3». Llegará un momento en que se le van a agotar las que llevan «1» y «2», y se verá forzado a elegir alguna más de las que llevan el «3». Moraleja: Esta elección tampoco resulta buena, porque el proceso terminará en algún momento.

Y estoy seguro de que usted detectó ya qué es lo que sucede: no importa cuál sea la bolita (o las bolitas) que lleve el número mayor. En algún momento, uno necesitará sacar alguna de ellas (porque las otras no pueden permanecer indefinidamente) y ni bien empiece a reducir las que llevan el número mayor, la situación está perdida: inexorablemente ¡se va a quedar sin bolitas!

La conclusión, entonces, es que no importa qué elección de bolitas uno haga en el comienzo, el proceso ¡necesariamente termina y no hay manera de prolongarlo indefinidamente!

El problema queda resuelto[94]. Si a alguno le quedaba alguna expectativa de poder diseñar esa estrategia, los argumentos demuestran que no será posible. Eso sí, no quiero terminar sin hacer una observación final: las *claves* de esta demostración pasan por dos lugares (al menos), que me interesa puntualizar:

a) Las bolitas que hay en las bolsas son infinitas, pero el número de bolitas que hay en la caja podrá ser increíblemente grande, pero ¡son finitas!

b) El argumento de elegir el número más *grande* de todos los que hay dentro de la caja es esencial para mostrar cómo uno va bajando la cantidad de ellas que hay al ejecutar el proceso, hasta un punto en donde ésas se agotan, y luego todas las que quedan tienen números más chicos. Esa *idea* de buscar el número *más grande* es la que me/nos permitió razonar con confianza sobre lo que estaba/estábamos haciendo en cada paso del proceso.

Reflexión final

No sé si a usted le pareció interesante, pero en alguna parte, cuando a uno le dicen que va a poder elegir en forma *discrecional* el número de bolitas, y podrá sacar tantas bolitas como quiera de infinitas bolsas… supone que sí, que debería haber una estrategia para seguir sacando en forma indefinida. Sin embargo, no se puede, y la clave está en que el número de bolitas de la caja es *finito* y eso cambia el panorama. Por supuesto, si el número de bolitas que uno pudiera poner en la caja fuera infinito[95], entonces sí, claramente se podría elaborar una estrategia que permita no terminar nunca.

www.elsolucionario.org

El hombre que calculaba

El hombre que calculaba es uno de los clásicos de la historia del siglo XX. Pocos libros generaron más *adicción* entre los difusores de la matemática. Pero lo notable es que siempre quedó claro que era una novela, en donde los problemas y planteos que aparecen son parte de una trama elaborada, en donde el autor participa sin ser el protagonista principal.

El libro fue publicado por primera vez en el año 1949 en Brasil[96]. Su autor fue el matemático brasileño Júlio César de Mello e Souza, quien lo firmó con un seudónimo: Malba Tahan. Lo curioso es que el libro (*O homem que calculava*) no sólo invita a pensar la solución de varios problemas, sino que está escrito en el marco de la cultura árabe. De hecho, en una de las biografías de Mello e Souza se sostiene que varias generaciones de brasileños se introdujeron en la cultura árabe gracias a la influencia del «más árabe de los cariocas» (o sea, los nacidos en Río de Janeiro).

El libro lleva 63 ediciones y ha vendido más de dos millones y medio de ejemplares. Además, fue traducido a más de 12 idiomas, que incluyen inglés, francés, italiano y castellano. El material que presenta de Mello e Souza generó la admiración de diversos autores, pero sobresale uno en particular: Jorge Luis Borges, quien comentó que después de haber leído *El hombre que calculaba* había quedado fascinado con los cuentos árabes.

Es muy difícil hacer justicia si uno quiere seleccionar un solo problema. De todas formas, elegí uno que no es ni el más conocido ni el mejor, pero —para mí— contiene la sencillez de lo que seduce como *perfecto.* Léalo con tranquilidad y dedíquele un rato a pensar la solución. Créame que no se va a arrepentir. Eso sí: voy a escribir una versión libre para no tener que reproducir todo el capítulo, pero verá usted qué interesante que es. Acá va.

Dos personas, digamos A y B, tienen unos panes para compartir con una tercera, a la que llamo C.

A trajo 5 panes y B trajo 3. En cambio C, no aportó ninguno.

Entre los tres comen los ocho panes (la misma cantidad cada uno) y por la generosidad de haberlo compartido, C les ofrece 8 monedas en muestra de agradecimiento.

¿Cómo indicaría usted que se haga la repartición? Cinco monedas para A porque aportó cinco panes, y tres monedas para B porque aportó los tres restantes. ¿Le parece razonable?

Sin embargo, hay otra manera de pensar el problema: C le entrega 7 (¡siete!) monedas a A y la restante (una sola) a B.

¿Por qué esta distribución es más justa que la anterior?

Solución

Como usted advierte, parece «antiintuitiva» esta distribución de monedas por parte de C. ¿Por qué habrían de corresponderle siete a A? Sin embargo, la explicación que provee Malba Tahan es impecable.

Las personas que van a comer son tres: A, B y C.

Sígame ahora con este argumento: como hay en total 8 panes para repartir, cada uno de ellos comerá la tercera parte. O sea, para hacer las cuentas más fáciles, en total hay 24 / 3 (= 8) panes que van a comer entre los tres.

De estos 24 / 3, cada uno de ellos va a comer 8 / 3.

Ahora bien: ¿cuántos *tercios de pan* —de esos 24 / 3— aportó A y cuántos B?

Como A contribuyó 5 panes, aportó 15 / 3, mientras que B, que entregó 3 panes al pozo común, ofreció 9 / 3.

Y ahora llega el momento *clave* del razonamiento: como A comió 8 / 3 pero aportó 15 / 3 de pan, entonces quiere decir que de lo que entregó sobraron 7 / 3 para que comiera C.

En cambio, como B aportó 9 / 3 de pan, pero se comió 8 / 3, sólo quedó 1 / 3 para ofrecerle a C.

Es decir, A aportó 7 / 3 de la comida de C y B en cambió solamente 1 / 3. Por eso, en la distribución de las monedas, C optó por darle siete a A y solamente

www.elsolucionario.org

una a B.

¿Por qué uno comete el error de creer que la primera distribución era la correcta? ¿Quiere pensarlo usted por sus propios medios?

Es que esa distribución sería justa si C se quedara con todos los panes para él. Entonces sí, estaría bien que les pagara de esa forma, pero ése *no es el caso.* C come, es cierto, pero A y B también.

Me imagino que usted estará pensando (lo que pensé yo en el momento que leí el argumento que escribí antes): ¡Qué interesante! ¿Cómo no se me ocurrió?

Pero *ése* es el atractivo mayor que —creo— tiene esta historia. Es sencilla, impecable en su lógica y nos exhibe (una vez más) lo falible de nuestras conjeturas. Es obvio que no tiene nada de malo que uno intuya equivocadamente, pero es bueno confrontar con uno mismo y con la realidad cuán frecuentemente esto nos pasa. Al menos, yo sé que *a mí* me pasa con asiduidad.

¿Cómo se puede saber si un número es múltiplo de 7?[97]

En la vida, es fácil saber si un número es divisible por 2 o no. Basta ver si el número *termina* en un dígito par: 0, 2, 4, 6 u 8. Si uno quiere saber si un número es múltiplo de 5 (o sea, si es divisible por 5), basta con ver si el número «termina en un 0 o en un 5».

De la misma forma, es fácil conocer si un número es múltiplo de 3 (sumo los dígitos del número y si resulta múltiplo de 3 es porque el original lo era) o de 4 (basta que las dos últimas cifras sean *múltiplos* de 4), etcétera. El problema es que no es tan sencillo decidir si un número es (o no) múltiplo de 7.

Quiero presentar acá un criterio que permite resolver el problema.

El proceso es el siguiente. Uno empieza con un número cualquiera (digamos 873.852). Quiere saber si es múltiplo de 7 (o no). Se efectúan entonces dos etapas (muy fáciles).

1) «Borro» el último dígito (en el caso de 873.852, el último dígito es un «2»). Queda 87.385.
2) Al número que queda (87.385) hay que «restarle» el «doble del dígito que saqué». En este caso, como saqué un número 2, hay que restar el doble de 2, o sea un 4.

   El resultado que se obtiene es:

   > 87.385 – 4 = 87.381

Es decir, la idea es ir «recortando» el número desde atrás, «borrando» el último dígito y al número que queda, restarle el doble del dígito que se sacó.

www.elsolucionario.org

Por ejemplo, si como hice, empiezo con:

> 873.852

tengo que «quitar» el número «2» (porque es el último dígito) y le tengo que restar «el doble de 2» (o sea 4) al número que queda. Es decir, uno empieza con:

> 873.852

le quita el último dígito y queda:

> 87.385

Ahora, «resta» el doble del dígito que sacó (que como era 2, significa que hay que restar «4»). El resultado es:

> 87.385 – 4 = 87.381 (*)

Al llegar a este punto, uno se fija si puede decidir fácilmente si el número que obtuvo es múltiplo de 7 (o no). Como tampoco es evidente si 87.381 es o no múltiplo de 7, entonces, reitero el proceso: «quito el último dígito» (en este caso el «1») y al resultado, le «resto el doble del número que saqué» (o sea, el doble de 1, que es un «2»).

A 87.381 le quito el último dígito, el 1.

Obtengo 8.738.

Ahora, resto 2.

> 8.738 – 2 = 8.736

Como tampoco sé si este número es múltiplo de 7 (fácilmente) o no, «itero» nuevamente el proceso: «retiro» el 6, y resto (6 × 2 = 12) al número que resulta.

Es decir, empiezo con 8.736.

Retiro el número «6» (que es el último dígito).

Obtengo: 873.

Ahora, resto el «doble del dígito que saqué» (que como era «6», significa que «resto 12»).

En este caso, tengo que «restar» 12 a 873.

> 873 – 12 = 861

El número que resulta, 861, tampoco me resulta sencillo decidir si «es o no» múltiplo de 7. Entonces, repito lo que hice. En este caso, tengo que «suprimir» el 1 y restar el «doble de 1» (o sea 2) al número que resulta. En este caso es:

> Empiezo con 861
>
> Le quito el «1» 86
>
> Resto ahora 2 × 1 86 – 2 = 84

Ahora SÍ es fácil descubrir que este número (84) es múltiplo de 7 (el número 84 = 7 × 12)[98]. Luego, el número original, también *tiene que ser* múltiplo de 7.

Otro ejemplo: 121.723.

Lo hago más rápido, aunque en cada paso lo que hago es «eliminar» el último dígito, y le resto el doble de este dígito al número que resulta.

www.elsolucionario.org

> 121.723
>
> 12.172 – 6 = 12.166
>
> 12.166
>
> 1.216 – 12 = 1.204
>
> 1.204
>
> 120 – 8 = 112
>
> 112
>
> 11 – 4 = 7… que como es múltiplo de 7 permite afirmar que el número original (121.723) es múltiplo de 7.

Explicación

¿Por qué funciona el método?

Antes que nada, la/lo invito a pensar lo siguiente: si uno suma (o resta) dos números que son múltiplos de 7, el resultado es también «múltiplo de 7.[99]»

Por lo tanto, si yo tengo un número X (que no sé si es o no múltiplo de 7) y le sumo (o le resto) un múltiplo de 7, al número X no se le altera la condición original que traía: si era múltiplo de 7 lo sigue siendo, y si no lo era tampoco puede pasar a serlo.

Otra observación. Fíjese en los primeros números de la «tabla del 7»:

> 0, 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91, etc.

Uno podría decir que «hasta acá» son números «más o menos reconocibles» como múltiplos de 7.

Por lo tanto, si uno «los viera» a estos números con uno o varios ceros atrás,

como por ejemplo 1.400 (el 14 con dos ceros), 280.000 (28 con cuatro ceros), 630 (63 con un cero)… podría detectar en forma *casi* inmediata que son también múltiplos de siete. Vea lo que sigue y fíjese si está de acuerdo conmigo.

> “
>
> $1.400 = 14 \times 10^2$
>
> $280.000 = 28 \times 10^4$
>
> $42.000 = 42 \times 10^3$
>
> $490.000.000 = 49 \times 10^7$
>
> $5.600.000 = 56 \times 10^5$
>
> $630 = 63 \times 10^1$

Todos estos números *también* son fácilmente identificables como múltiplos de 7, ya que son los números que estaban en la «tabla» del 7, multiplicados por potencias de 10.

Es decir, cuando uno encuentra un número cualquiera que termina en uno o varios «ceros», para decidir si es o no múltiplo de 7 basta con fijarse si el número que resulta «eliminando» todos los ceros lo es.

El «criterio» que presenté, entonces, intenta ir transformando el número original en otro (al «quitarles» el último dígito y luego «restarle el doble de este dígito») hasta llevarlo a uno de los números que aparecen en la página anterior, pero *sin los ceros.*

Sin embargo, lo que *falta demostrar* es que al efectuar ese proceso uno *no altera* la divisibilidad por 7 que tenía el número original. Y eso es lo que voy a hacer ahora: convencerla/lo de que es así.

Fíjese. Al número original lo voy a llamar A (en el caso del primer ejemplo que figura antes A = 873.852). Ese número A se puede escribir así:

A = 10 × B + C (donde C, es un número entre 0 y 9). O sea, C es lo que llamamos EL ÚLTIMO DÍGITO.

www.elsolucionario.org

En el ejemplo, A = 873.852 = 10 x (87.385) + 2, y el número 2 es el que «juega el papel de C», ya que es el último dígito.

O sea, estoy separando el último dígito. Todo lo que resta es un múltiplo de 10.

Como lo que hace el criterio es «quitar» el último dígito y luego «restar» el doble de este dígito, uno en realidad, está restando:

> C + 2 x C x 10 = (1 + 2 x 10) x C = 21 x C

Es decir, uno le resta al número A, el número (21 x C), que es un múltiplo de 7 (ya que 21 es múltiplo de 7).

Luego si A era un múltiplo de 7 originalmente, al restarle (21 x C) lo sigue siendo (y viceversa).

No obstante, lo interesante de haber hecho esto es que el número que uno obtiene:

> A – (C + 2 x 10 x C) = (10 x B + C) – (C + 2 x 10 x C) =
> 10 x B – 10 x 2 x C = 10 (B – 2C)

es un múltiplo de 10.

En el caso del ejemplo, uno empieza con:

> 873.852

y restó 21 veces el número 2, o sea:

> 21 x 2 = 42
>
> 873.852 – 42 = 873.810

El número que uno obtiene, 873.810 será múltiplo de 7, si quitándole el 0 también lo es. O sea, si 87.381 es múltiplo de 7.

Una vez más, hay que restar ahora el último dígito (que es 1), menos el doble de 1 (que es 2). Es decir, tengo que restar 21 veces el número 1.

> 87.381 – 21 = 87.360

Otra vez, este número es un múltiplo de 10, y será múltiplo de 7 o no, dependiendo de que 8.736 lo sea o no (quitando el 0).

Lo mismo que antes, restamos ahora 21 veces el número 6.

> 8.736 – 21 x 6 = 8.736 – 126 = 8.610

Este número será múltiplo de 7 (o no) siempre y cuando 861 lo sea (o no).

Aplico el procedimiento una vez más y restamos 21 veces el número 1, o sea, 21.

> 861 – 21 = 840

Ahora bien: este número, es:

> 84 x 10 = 840

y como 84 es múltiplo de 7, entonces uno deduce que el número original (873.852) es múltiplo de 7 también.

En resumen, lo que uno hace en cada paso, es restar «copias» de 7. En realidad, en cada paso resta «tantas copias de 21 como indica el último dígito» del número que uno está analizando. Eso no altera la divisibilidad por 7 de este número[100].

Asimismo, en cada paso de un número que es múltiplo de 10. Lo que el

www.elsolucionario.org

procedimiento indica es revisar el número sin los ceros y su divisibilidad por 7[101].

Un problema inútil: ¿cuántas páginas tiene un libro?

El problema que sigue sirve solamente para entretenerse. NO (con mayúsculas) creo que le aparezca en ningún momento de su vida como una situación que tenga que resolver, pero me pareció divertido y por eso lo quiero compartir.

Piense en un libro cualquiera. Ese libro tiene una cierta cantidad de páginas. Por otro lado, cada página está numerada, y cada uno de los números de cada página tiene una cierta cantidad de dígitos.

Por ejemplo, si el libro tuviera 12 páginas, entonces los números que aparecerían en esas páginas serían:

> 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 y 12

Cuente los dígitos que se usan en total: las nueve primeras páginas involucran exactamente *nueve* dígitos, y las 10, 11 y 12, tienen dos dígitos cada una. Luego, en total, hay seis dígitos más.

Si ahora quiero calcular el total de dígitos que se usaron para numerar *todas* las páginas, tengo que sumar, los nueve primeros más los seis que aparecen en las tres últimas páginas.

En total, hay:

> 9 + 6 = 15 dígitos.

www.elsolucionario.org

Otro ejemplo. Si se tiene un libro con 42 páginas, y uno quiere calcular el número de dígitos que hubo que usar para numerar *todas* las páginas, ¿cuántos son?

Respuesta: como antes, las 9 primeras páginas involucran 9 dígitos.

De la 10 en adelante, cada página requiere dos dígitos cada una. Por lo tanto, desde la página 10 hasta la 42 hay en total 33 páginas.

Cada una de estas 33 páginas usa dos dígitos en su numeración. Conclusión, estas 33 páginas involucran:

> 33 x 2 = 66 dígitos.

Si ahora agregamos los 9 dígitos de las primeras 9 páginas, en total hay:

> 9 + 66 = 75 dígitos.

Moraleja: 42 páginas, usa 75 dígitos para numerarlo.

Ahora llegó el momento de plantear el problema del que le hablé al principio. Por supuesto, después de la introducción, podríamos preguntarnos: ¿cuántos dígitos tiene un libro con 1.346 páginas? ¿O uno de 13.268? Pero ése no sería un buen desafío. Es decir, sería cuestión de contar cómo lo hice, pero no tendría ninguna novedad, nada más que *hacer una cuenta.*

En cambio, si yo le dijera que hay un libro que usó 606 dígitos para numerar sus páginas, y le preguntara: ¿cuántas páginas tiene el libro?, me parece que ése es un problema más interesante para tratar de abordar. ¿Usted qué dice?

Y un paso más, antes de esperarla/lo en la página de las respuestas: ¿no le parecería interesante poder resolver *todas las preguntas de este tipo al mismo tiempo?* Es decir, ¿no sería interesante encontrar una *fórmula* que permita deducir el número de páginas de un libro si uno conociera el número de dígitos que se usaron para numerarlas?

Ahora sí, me retiro y la/lo espero más adelante.

Solución

Le propongo empezar por casos particulares, que son más sencillos de abordar. En principio, quiero ponerme de acuerdo con usted en una *notación.* Es decir, en una forma de *ponerle un nombre a un objeto.* En este caso, quiero llamar:

> P(n)

al número de dígitos que se usan para numerar *n* páginas.

Por ejemplo, si el libro tuviera nada más que 6 páginas, entonces, necesitaríamos solamente seis dígitos para numerarlas:

> 1, 2, 3, 4, 5 y 6.

Luego:

> P(6) = 6

Si el libro tuviera 10 páginas, entonces necesitamos:

> 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10

¿Cuántos dígitos hicieron falta? (piense usted). Fíjese que en total hay 11 dígitos. ¿Por qué? Porque los primeros *nueve* son los que sirven para numerar las primeras 9 páginas, y para la página 10, necesitamos *dos dígitos: el 1 y el 0.*

En total, necesitamos entonces 11 dígitos. Luego:

> P(10) = 11.

www.elsolucionario.org

Si usted revisa lo que escribí, en el planteo del problema, verá que ya nos hemos convencido que:

> P(12) = 15.

Si tuviéramos un libro de 42 páginas, también vimos que nos hicieron falta 73 dígitos. Luego,

> P(42) = 73.

Ahora tratemos de sacar algunas conclusiones un poco más generales. Es decir, conclusiones que nos den una idea del número de dígitos que se necesitan usar para numerar un libro de *n* páginas.

Empecemos con casos particulares más pequeños, y le pido a usted que *revise* las cuentas que yo escribo acá. Hágalo hasta convencerse de me entendió o descubrir que lo que yo escribí está equivocado.

Por ejemplo, si el número de páginas *n* es un número que es *más grande o igual que 1, pero es menor o igual que 9*, entonces:

> P(n) = n.

Es que si el número de páginas es menor que 10, entonces el número de dígitos que hace falta usar es exactamente el número de páginas.

Ahora demos un paso más. ¿Qué pasa si el número de páginas es un número que está entre 10 y 99? ¿Cómo contar el número de dígitos involucrados? ¿Quiere pensar usted?

Le propongo un camino. Si fueran 42 páginas y uno multiplicara por *dos* el número de dígitos, se tendrían 84 dígitos.

Es decir, si uno *necesita dos dígitos* para cada página, y hay 42 páginas, entonces en total hay 84 dígitos. Pero, en realidad, uno debería *excluir las*

primeras 9 páginas del libro, porque para numerarlas sólo hace falta un dígito. O sea, estaríamos contando 9 dígitos más de los que hacen falta.

Luego, hay que *restar:*

> 84 – 9 = 75

y se tiene el número que uno busca. Es que al haber multiplicado por dos al número de páginas que había, es como si hubiéramos supuesto que incluso las primeras 9 páginas necesitaban de dos dígitos para la numeración, como si estuviéramos contando las páginas así:

> 01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08 y 09.

Es decir, al restar el número 9 lo que estamos haciendo es *restar* los 9 números ceros que no hacen falta incluir.

Si entendió todo esto hasta acá, créame que estamos (usted y yo) muy cerca de la solución general. Lo que resta ahora son nada más que cuestiones técnicas. Las verdaderas ideas están más arriba. Por eso le pregunto acá (y la/lo invito a preguntarse a usted) si hasta acá me entendió.

Fíjese, entonces, que uno puede sacar esta conclusión que sirve para *todos los casos* en los que el número *n* de páginas esté entre 10 y 99.

El número de dígitos P(n) cuando el número *n* está entre 10 y 99 es:

> **P(n) = (2 × n) – 9**

Ahora yo le pregunto: ¿cuál debería ser el próximo paso? Sí, ya sé… usted ya advirtió que lo que hace falta ahora es saber calcular el número de dígitos que hacen falta cuando uno tiene, por ejemplo, un libro con *n* páginas, pero siendo *n* un número entre 100 y 999.

¿Y cómo se puede hacer esto?

www.elsolucionario.org

Si uno multiplicara por *tres* el número de dígitos, estaría incluyendo las primeras 9 páginas (que como vimos sólo necesitan de un dígito cada una) y las páginas de la 10 a la 99 (que ya sabemos que sólo necesitan 2 dígitos cada una).

Es decir, al multiplicar por 3 estamos *contando* dígitos que no necesitamos. ¿Cuáles y cuántos hay que descontar?

Para poder pensar esto, podríamos imaginar que hemos escrito las primeras *nueve páginas,* como si hubieran estado escritas así:

> 001, 002, 003, 004, 005, 006, 007, 008 y 009

O sea, hemos contado *dos dígitos* de más por página (que son los dos números 0). Luego, hay que descontar 18 de las primeras 9 páginas.

Pero de las páginas que van desde el 10 hasta el 99, *también hemos contado dígitos de más.* Sí, pero ¿cuántos?

En este caso, es como si las páginas hubieran estado numeradas así:

> 010, 011, 012, 013, 014, 015…, 097, 098 y 099

O sea, estamos contando *un dígito* de más por página (el cero que estamos usando a la izquierda). Como hay 90 páginas (fíjese que empezamos a contar desde la página 10 (y no desde la 1) y llegamos hasta la 99, por lo tanto, hay 90 páginas a las que les estamos agregando un dígito.

Luego, hay que restar también, 90 dígitos.

En definitiva, hay que restar:

a) 18 dígitos de las primeras 9 páginas.
b) 90 dígitos de la 10 hasta la 99.

En total, hay que restar:

> 18 + 90 = 108 dígitos.

Luego, la fórmula que uno busca, en el caso de que el número *n* de páginas esté entre 100 y 999 es:

> **P(n) = (3 × n) – 108** (*)

¿Se podría seguir? Sí, claro. Se podría hacer la cuenta de cuántos dígitos hacen falta para numerar un libro que tiene un número de páginas *n* en donde el número *n* es un número mayor que 1.000 y menor que 9.999**[102]**.

Una vez hecho todo esto, ¿se acuerda del problema original? Se trataba de determinar cuántas páginas tenía un libro para el cual hizo falta usar 606 dígitos para numerarlas.

Bien, en ese caso, uno ya tiene *todas las herramientas que le hacen falta.* ¿Por qué?

Porque mirando en (*), todo lo que hay que hacer es *despejar el número «n» de la siguiente igualdad:*

> P(n) = 3 × n – 108 = 606 (**)

y se obtiene entonces

> 3 × n = 606 + 108 = 714, lo que quiere decir: n = 714 / 3 = 238.

El número *n* que estábamos buscando es 238.

www.elsolucionario.org

Dos puntos del mismo color a un kilómetro de distancia

Entrenar la intuición es parte de nuestra actividad cotidiana. A diario uno «vive» situaciones que se parecen, pero que son distintas. ¿Qué es lo que se transforma en rutinario? Aquello que uno hace casi sin pensar, sin «despeinarse», virtualmente sin nueva elaboración. Eso transforma cualquier actividad en tediosa: una vez que uno descubre qué es lo que hay que hacer y cómo minimizar el tiempo y ahorrar energía para hacerlo, deja de tener gracia. Y busca una nueva propuesta, un nuevo desafío. Al menos, así es el tipo de vida que yo me imagino: una vida creativa, que promueva —si se pudiera cotidianamente— a generar ideas nuevas, caminos no recorridos.

¿Por qué digo todo esto acá? Porque quiero compartir con usted un problema bien sencillo, muy fácil de comprender, y quiero invitarla/o a lo siguiente: lea el enunciado y nada más. No avance. Dedíquese en soledad a pensar si le parece que es posible o no. Acá va.

«Supongamos que uno coloreara todos los puntos de una ciudad de uno de dos colores: blanco (B) y negro (N)[103]. ¿Es posible —independientemente de la coloración que usted diseñó— encontrar siempre dos puntos pintados del mismo color pero que estén a un kilómetro de distancia?».

¿Usted qué cree? ¿Será posible o no? ¿Qué le dice su intuición? ¿Sí o no?

Ahora sigo yo. Quiero plantear dos maneras posibles de resolver el problema. Una es un poco más laboriosa, pero efectiva. La otra, es preciosa, elegante y muy contundente.

Empiezo. Elija un punto cualquiera. Supongamos que es negro. Uno podría trazar un círculo de radio de un kilómetro con centro en ese punto. Imagine

esa situación entonces: usted está parado en ese punto negro (ver figura 1), y alrededor suyo ha quedado dibujado un círculo de un kilómetro de distancia. Claramente, si en ese círculo llegara a haber otro punto negro, listo. El problema estaría resuelto, porque esos dos puntos estarían a una distancia de un kilómetro y son ambos del mismo color: negro.

Sin embargo, bien podría pasar que todos los puntos del círculo fueran blancos (ver figura 2). En ese caso, tome un punto cualquiera de este círculo, al que voy a llamar B. Este punto B tiene que ser blanco.

Trace ahora un nuevo círculo (también de un kilómetro de radio y con centro en B). Ese nuevo círculo va a «cortar» al círculo anterior en dos puntos, a los que llamo B1 y B2 (ver figura 3). Esos dos puntos tienen que ser blancos también, ya que todos los puntos del círculo original eran blancos y cada uno de ellos está a un kilómetro de distancia del punto B.

Moraleja: Hemos encontrado dos puntos del mismo color que están a un kilómetro de distancia (como queríamos probar).

Ahora tenemos resuelto el problema, al menos de *una* forma. Quiero plantear otra, mucho más rápida, expeditiva y que no necesita virtualmente de ninguna herramienta.

Trace en esa ciudad un triángulo equilátero de lado igual a *un* kilómetro. Los tres vértices no pueden ser de tres distintos colores, porque todos los puntos están pintados o bien de blanco o bien de negro. Por lo tanto, *tiene que haber al menos dos* de esos vértices que sean del mismo color (o bien los tres). En cualquier caso, esos dos vértices que tienen el mismo color están a una distancia de un kilómetro**[104]**.

Como se ve, esta construcción es muy fácil de comprender y permite arribar a la solución de manera inmediata. Ahora bien, la pregunta es: ¿qué contestó usted al principio? ¿Le parecía que era posible encontrar esos puntos?

¿Pudo usted responder correctamente? (Vea, si no pudo, es irrelevante. Sólo se trata de educar la intuición y, de hecho, con este tipo de problemas lo que yo pretendo es eso: mejorarnos —usted y yo— en aprender a elaborar estrategias para contestar preguntas y responder problemas).

www.elsolucionario.org

Quizás usted encontró una forma incluso más rápida, ¿por qué no? En cualquier caso, ojalá que haya disfrutado del trayecto.

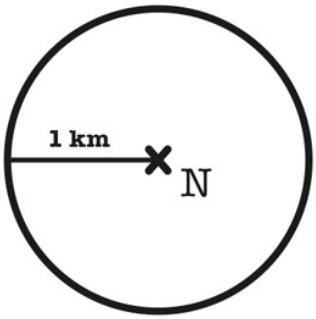
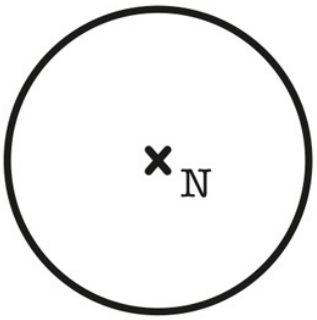


Fig. 1



Todos los puntos de la circunsferencia son blancos

Fig. 2

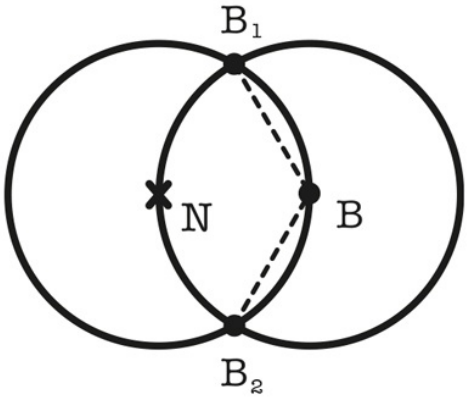


Fig. 3

Reversión de números

Ahora quiero proponerle un desafío. Sí, un desafío «numérico». Al principio, podemos hacerlo usando un mazo de cartas, pero usted verá más adelante que no son necesarias.

Acá va: de un mazo de cartas cualquiera (españolas o francesas), elija los primeros seis números de un palo cualquiera (o sea, los números 1, 2, 3, 4, 5 y 6).

Ordénelas como quiera. Como yo (desde acá) no puedo ver lo que usted eligió, voy a «imaginarme» un orden posible. Digamos que la pila quedó así:

> 3, 2, 4, 6, 1, 5

Ahora fíjese en la carta que aparece arriba de todas, el número 3. Ese número 3 le indica lo que tiene que hacer ahora: *invierta el orden de las primeras tres cartas.* Es decir, ahora la pila queda así:

> 4, 2, 3, 6, 1, 5 (*)

Eso sucedió porque las primeras tres cartas que figuraban originalmente eran 3, 2 y 4, en ese orden (de arriba hacia abajo). Ahora, como las tuvo que invertir, le tuvieron que quedar: 4, 2 y 3 —como figura en (*)—.

Ahora, hay una *nueva* carta arriba de todo: el número 4.

Esto indica que las cartas cuyo orden hay que invertir son las cuatro primeras. Ahora resulta:

www.elsolucionario.org

> 6, 3, 2, 4, 1, 5

Y así seguimos modificando el orden de las cartas, atentos a lo que indica la *primera* de la pila. Aquí figuran todos los pasos, desde el orden original:

> 3, 2, 4, 6, 1, 5
>
> 4, 2, 3, 6, 1, 5
>
> 6, 3, 2, 4, 1, 5
>
> 5, 1, 4, 2, 3, 6
>
> 3, 2, 4, 1, 5, 6
>
> 4, 2, 3, 1, 5, 6
>
> 1, 3, 2, 4, 5, 6

Y acá se termina el proceso. ¿Por qué termina? Es que a partir de ahora, como la primera carta es la que lleva el número *uno,* entonces ya no queda nada por hacer.

La/lo invito a que intentemos con otro ordenamiento de las cartas. Digamos ahora:

> 6, 4, 1, 3, 2, 5

Ahora la lista es la siguiente:

> 6, 4, 1, 3, 2, 5
>
> 5, 2, 3, 1, 4, 6
>
> 4, 1, 3, 2, 5, 6

2, 3, 1, 4, 5, 6

3, 2, 1, 4, 5, 6

1, 2, 3, 4, 5, 6

Y acá hay que parar otra vez porque llegamos a que el número 1 figure en la pila arriba de todo. Ahora bien: ¿qué pregunta o mejor dicho, qué preguntas se le ocurren a usted? Le sugiero que no avance en la lectura de lo que sigue hasta haber revisado las dos listas que generamos y pensar qué preguntas valdría la pena hacerse respecto de lo que está sucediendo.

Intente usted empezando con otro orden y fíjese a qué situaciones llega y qué potenciales conjeturas y/o conclusiones puede sacar.

Dicho esto, quiero proponer yo una primera observación, que me parece *casi natural hacer:* «¿Será verdad que *cualquiera* sea el orden inicial de las cartas, uno *siempre* llegará a tener un número "1" al principio?».

Ahora le toca a usted. Si le parece que *no siempre* tiene que suceder que uno llegue a tener un número 1 al principio, encuentre un orden en donde eso pase**[105]**. Es decir, ofrezca un ejemplo en donde usted ordena las cartas de tal forma que, si bien uno repite el procedimiento una y otra vez, *nunca* se llega hasta el número 1 como primera carta. Y, si en cambio, le parece que *siempre* va a suceder (llegar al número 1 no importa cuál sea el orden inicial de las cartas), entonces trate de encontrar una explicación que lo justifique. Verá que es muy entretenido.

Solución

Como usted habrá advertido a esta altura (si es que intentó pensar el problema y/o si exploró con varios ejemplos), *siempre* llegó al número 1 al principio, y allí se detuvo el proceso. Sin embargo, como estoy —casi— seguro de que no probó con *todos los posibles órdenes,* entonces por ahora usted no tiene la certeza absoluta de que eso vaya a suceder en todos los casos. Por eso es que por ahora sigue vigente la pregunta: «¿será cierto que *siempre* pasa esto?».

Y la respuesta es que *sí,* que siempre sucede. ¿Por qué?

www.elsolucionario.org

Sígame con el siguiente razonamiento. Como son finitas cartas (de hecho son nada más que seis), hay *finitas maneras de ordenarlas.* De hecho, si uno repite y repite el proceso descripto, hay dos posibilidades:

a) o aparece la carta que lleva el número 1 arriba de todo en la pila, o bien,
b) uno entra en una suerte de «*ciclo*»[106], o sea, un orden al cual uno ya había llegado anteriormente mientras ejecutaba el proceso, y, por lo tanto, a partir de ahí los ordenamientos empiezan a repetirse.

Ahora quiero que *juntos* veamos que no se puede llegar a un ciclo (y por lo tanto se llegará inexorablemente a tener un *uno* en la carta de arriba).

Supongamos que sí, que nos tropezamos con un ciclo, y hay una serie de ordenamientos que empiezan a repetirse.

Entonces, de *todos los órdenes que fuimos encontrando en el camino,* tiene que haber habido una carta entre todas que fuera la mayor. Por ejemplo, en el caso que yo puse antes, el número 6 fue la carta más alta. Pero no necesariamente tuvo que haber ocurrido que fuera el 6, pudo haber sido otra (entre todas las que aparecieron primera entre todas las posiciones).

Piense lo que pasa a partir de allí con el número 6 y después retome la lectura acá.

Una vez que la carta más alta (entre todos los órdenes posibles que usted encontró en el camino) llegó al primer lugar, al invertirlas, esa primera carta *quedará en el lugar que le corresponde en el orden natural.* Por ejemplo, si la primera carta es un *seis* (confronte cuando llegamos a 6, 3, 2, 4, 1, 5), en el próximo paso, ese número *seis* queda en su lugar: el sexto.

No obstante, además, el número seis *nunca más llegará al primer lugar.* ¿Por qué? Porque para que eso suceda, debería haber *otro* número 6 al principio. Pero esto no puede pasar porque *no hay* dos números «seis».

Es decir, una vez que la carta más grande de todos los ordenamientos que encontramos en el camino del ciclo llega al principio, esa carta pasa a su posición natural, si las ordenáramos en forma ascendente y, además, *no*

aparecerá nunca más como primera carta. El seis, a partir de ahora, quedó *descartado del juego:* quedará siempre en su posición: la sexta.

Por otro lado, si la carta más alta de todos los órdenes hubiera sido un «5», por ejemplo, una vez que llega el 5 al primer lugar, en el siguiente paso uno invierte el orden en las cartas, y por lo tanto, ese número 5 queda ahora en la *quinta posición* y, además, no llega nunca más al primer lugar (porque ya no hay más números más grandes que 5, ni tampoco el propio 5 puede aparecer como la «carta» de arriba. Fíjese en el ejemplo donde el 5 aparece en el primer lugar después de haber eliminado al *seis*, y las cartas quedaron en este orden: 5, 1, 4, 2, 3, 6.

Al invertir el orden, quedan 3, 2, 4, 1, 5 y 6.

Que el número seis no participaría más, ya lo sabíamos, y por eso quedó «arrinconado» en su posición original (la sexta). Ahora, lo mismo sucedió con el 5: quedó en la quinta posición, y entre las cartas que ahora seguirán moviéndose, como ninguna de ellas podrá ser ni un 5 ni un 6, esas dos posiciones no serán «tocadas» más por ninguna de las inversiones que tengamos que hacer.

Siguiendo con la misma idea, entre todas las posiciones posibles que quedan tiene que haber *otra vez* una carta que sea la mayor (que ya no podrá ser ni un 5 ni un 6). Usando el mismo razonamiento una y otra vez, se ve que en algún momento las cartas que vayan apareciendo en el primer lugar son cada vez menores, hasta que inexorablemente se llega al número uno**[107]**.

Esto termina la demostración. Ahora *sí* podemos asegurar con certeza que sin importar el orden inicial, al repetir el proceso de inversión explicado anteriormente, en algún momento, *inexorablemente*, la primera carta tendrá que ser un número *uno*.

Algunas observaciones

Me parece que vale la pena reflexionar sobre el argumento central que usé para poder convencernos de que inevitablemente llegaríamos a tener un número *uno* al principio. Ese argumento es que al repetir el proceso, como son finitos ordenamientos, *si exploramos la primera carta de cada uno de*

www.elsolucionario.org

ellos, ***tiene*** que haber una carta que tenga el número mayor. Y ésa es la clave, porque en el siguiente paso el número de esa carta queda en su posición natural (en el orden creciente) y no aparece nunca más. Por lo tanto, en todos los ordenamientos que quedan *tiene que haber una carta que lleve el número mayor*, pero que ya será menor que la anterior. Al repetir este proceso una y otra vez, se termina en el número *uno*, como uno quería mostrar. Eso sí: se puede elegir *el número más grande de entre todos los que figuran al principio* porque hay *¡un número finito de ordenamientos!* Si fueran infinitos, esto no se hubiera podido hacer.

Acá debería terminar todo este segmento. Sin embargo, a usted, que está leyendo estas líneas, me gustaría hacerle algunas preguntas:

a) ¿Le parece importante que hayan sido las cartas del 1 al 6? ¿Qué pasaría si en lugar de terminar en el 6, eligiéramos los números del 1 al 7, del 1 al 8, o del 1 al 12?

b) ¿Y si en lugar de cartas (en donde uno está restringido a elegir números que terminan en el 12, en las cartas españolas, o en el rey, en las cartas francesas), uno eligiera los primeros 20 números? ¿O los primeros 150 números? ¿O los primeros *n* números (en donde *n* es cualquier número natural mayor o igual que 1)?

Lo dejo a usted pensando, pero estoy seguro de que a esta altura usted está en condiciones de contestarlas todas sin demasiado esfuerzo. ¿Será así? Si prefiere, podrá encontrar las respuestas un poco más adelante, pero si me permite sugerirle algo, evite leer lo que yo escribo porque se privará usted de poder *inferir* algo en función de lo que construimos.

Respuestas adicionales

a) No, no es importante que las cartas sean solamente las que van entre el 1 y el 6. Si en lugar de terminar en 6, hubiéramos elegido todas hasta el 7, el argumento sería el mismo, sólo que en lugar de haber 6! = 720 ordenamientos hay 7! = 7 × 6 × 5 × 4 × 3 × 2 × 1 = 5.040.

   Pero eso no produce ninguna modificación esencial. De hecho, lo que hicimos sigue valiendo sin diferencias: buscar

la carta más alta de todas las que aparecen y fijarse que esa carta, a partir de que apareció la primera vez, no reaparece nunca más. Y a partir de ese instante, lo mismo sucede con la más grande de las que siguen. Por otro lado, da lo mismo si elegimos las primeras ocho o las primeras 12 para establecer el orden inicial.

b) Por último, si en lugar de tener cartas, uno tuviera los primeros *n* números naturales y sigue las reglas ya especificadas para generar otras secuencias (una vez que uno eligió una forma de empezar), el argumento es *idéntico*, e inexorablemente se llegará en algún momento al número 1.

Una última observación: Este tipo de argumento es muy útil cuando uno necesita generalizar alguna idea, o cuando lo que se pretende es comprobar que lo que vale en ciertos casos particulares se puede ampliar a casos con menores restricciones. Espero que lo haya podido disfrutar.

www.elsolucionario.org

Un problema precioso de aritmética

El que sigue es un problema «estrictamente» de aritmética. ¿Qué quiere decir aritmética? ¿Qué diferencia hay con la matemática toda? Bueno, la aritmética es la *rama* de la matemática que se dedica a estudiar las cantidades, los números, las relaciones entre ellos, las operaciones elementales entre estos. Es la de uso más común. No creo que exista persona que haya pasado por cualquier estamento dentro de una escuela y no haya estudiado «algo» de aritmética, aunque más no sea los números naturales, incluso si no hubiera hecho nada más con ellos después (lo cual es *altamente* improbable).

La siguiente historia tiene una particularidad: no le va a servir para nada. No, quiero corregirme, no es que no le va a servir para nada, sino que no le va a servir para resolver ningún problema en particular en su vida cotidiana. Usted *nunca* se verá enfrentado con un problema como éste.

La pregunta que surge naturalmente es: «¿Y para qué lo escribe entonces?». Lo escribo porque creo que sirve para entrenarse a pensar y a usar la lógica. No es la lógica que uno está acostumbrado a usar en la vida de todos los días, pero es una lógica que ofrece una utilidad invisible: uno *aprende* a pensar, *entrena* el cerebro, *recorre caminos* no habituales, *se plantea* cosas que no ocupan nuestra mente en forma habitual. Y así podría seguir.

Pero ¿por qué? Bueno, es que creo que cuando uno se tropieza con un problema, no necesariamente está preparado para resolverlo, no necesariamente sabe para qué lado arrancar, y a cuantas más dificultades esté acostumbrado a superar, mejor entrenado estará para allanar la que enfrente en ese momento.

Para eso sirve: para estar más preparado, más educado.

Una cosa más: para resolverlo hace falta conocer dos conceptos que le voy a recordar y que usted verá que son muy sencillos de entender. No se asuste con los nombres. Créame que vale la pena hacer el esfuerzo (mínimo) para saber de qué se trata. Acá van.

a) «Elevar» un número al cuadrado es multiplicarlo por sí mismo. Por ejemplo, 2 elevado al cuadrado (y se escribe 2^2) es igual a: $2^2 = 2 \times 2 = 4$. De la misma forma, 7 elevado al cuadrado, o sea $7^2 = 7 \times 7 = 49$. Ahora bien: así como *la resta* es la operación *inversa* a la suma, o *la división* es la operación *inversa* al producto o multiplicación, hay una operación *inversa* a elevar al cuadrado, y se llama *sacar la raíz cuadrada*[108]. Es decir, sacar la raíz cuadrada de 16 (por ejemplo), significa tratar de encontrar un número tal que al elevarlo al cuadrado uno obtenga 16. En este caso, 4 elevado al cuadrado, o lo que es lo mismo 4^2 resulta ser igual a 16, ya que 16 es igual a 4×4. Por lo tanto, si uno «vuelve para atrás», la raíz cuadrada de 16 es igual a 4. De la misma forma, la raíz cuadrada de 25 es igual a 5, porque $5^2 = 5 \times 5 = 25$.

b) Ahora, otro concepto más: le recuerdo que un número positivo se llama *primo,* si tiene exactamente dos divisores[109] positivos: él mismo y el número uno[110]. Por ejemplo, 2 es primo (es solamente divisible por 1 y por 2), 3 es primo (es solamente divisible por 1 y por 3), y por las mismas razones 5, 7, 11, 13, 17, 37 son números primos.

Dicho esto, ahora estoy en condiciones de plantear el problema. Dice así:

Encuentre el *único* número de seis dígitos ABCDEF de manera tal que se cumplan las siguientes seis condiciones:

1) Los dígitos *son todos diferentes.* Es decir A, B, C, D, E y F son todos distintos.
2) Ninguno de ellos es igual a cero.
3) A es la mitad de B.
4) Si uno pone «juntos» los números BC y calcula la raíz cuadrada, se obtiene el número D.
5) La suma de A + C + E resulta ser igual a F.
6) El número F es un número primo.

www.elsolucionario.org

Ahora es el momento en el que la/lo voy a dejar en soledad. Dése un poco de tiempo, y disfrute también de un problema que *solamente* tiene que ver con la lógica. No hay que SABER nada particular, salvo los conceptos que ya están escritos. El resto son puras deducciones que usted está en condiciones de hacer.

Respuesta

Queremos *construir* al número ABCDEF.

Veamos cómo interpretar e hilvanar cada uno de los seis datos presentados. Para empezar, sabemos que los *seis dígitos* que figuran son distintos, y ninguno de ellos es cero. Por lo tanto, hay que elegirlos entre:

> 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9.

Como dice que el número A es la mitad de B, entonces B *tiene que ser un número par*. Hay cuatro opciones:

> B = 2, 4, 6 u 8

Naturalmente, el número A entonces será (respectivamente) (ya que es la mitad de B)

> A = 1, 2, 3 o 4

Es decir, ya sabemos que el número que buscamos ABCDEF «empezará» de una de estas cuatro formas:

> 12 o 24 o 36 o 48 (*)

Por otro lado, dice que si uno *mira* al número BC y calcula su raíz cuadrada, se obtiene el número D. Luego, el número BC tiene que resultar de *elevar al*

cuadrado alguno de los dígitos que figuran entre 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. ¿Cuáles resultan? Veamos:

> $1^2 = 1$
>
> $2^2 = 4$
>
> $3^2 = 9$
>
> $4^2 = 16$
>
> $5^2 = 25$ (**)
>
> $6^2 = 36$
>
> $7^2 = 49$
>
> $8^2 = 64$
>
> $9^2 = 81$

Sin embargo, por lo que vimos recién, el número B tiene que ser par. Luego, de todos los números que figuran en la columna (**), solamente nos interesan los que tienen en el primer dígito un número par. Es decir: 25, 49, 64 y 81[111].

Ahora, juntando los datos que figuran en (*) y (**), el número ABCDEF tendrá que «empezar» con una de estas cuatro posibilidades:

> ABC = 125
>
> ABC = 249
>
> ABC = 364
>
> ABC = 481

www.elsolucionario.org

Pero ahora puedo agregar también el número D a cada uno de estos casos, ya que D resulta ser la raíz cuadrada de BC. Tenemos entonces:

> ABCD = 1255 (ya que la raíz cuadrada de 25 es 5)
>
> ABCD = 2497 (ya que la raíz cuadrada de 49 es 7)
>
> ABCD = 3648 (ya que la raíz cuadrada de 64 es 8)
>
> ABCD = 4819 (ya que la raíz cuadrada de 81 es 9)

Dicho esto, usted advierte que el primer caso hay que excluirlo, porque el número que buscamos no puede tener dígitos repetidos. Por lo tanto, no puede empezar como 1255.

Las alternativas que quedan para ABCD son:

> 2497, 3648 o 4819. (***)

Ahora voy a usar la *quinta* de las seis condiciones que están impuestas al principio del problema: es la que dice que:

> A + C + E = F

Luego, si uno mira (***), deduce que:

> 2 + 9 + E = F (originada en el caso 2497)

o bien,

> 3 + 4 + E = F (proveniente del caso 3648)

o si no,

> 4 + 1 + E = F (generada por el caso 4819).

La primera de estas tres posibilidades queda excluida. ¿Por qué?

Es que si uno mira la igualdad 2 + 9 + E = F, los primeros dos números ya suman 11 y, por lo tanto, al exceder a *nueve*, F no podría de ser *un* dígito.

Quedan entonces *dos* posibilidades:

> 3 + 4 + E = F

o bien,

> 4 + 1 + E = F.

Analicemos el primer caso. Tenemos dos datos:

a) el número empieza como 3648;
b) cumple la igualdad: 3 + 4 + E = F.

Piense ahora conmigo: ¿qué dígito *podría* ser el número «E»? Fíjese que cualquiera sea E, el número F *tiene* que ser un dígito también. Por lo tanto, la suma que figura en (b) *no puede* exceder a *nueve*. Luego, como ya suman 7 entre los primeros dos números, al número E no le quedan muchas posibilidades (piense usted cuáles son antes de seguir leyendo).

E puede ser: 1 o 2. No puede ser 3 porque ya lo hemos usado y, por lo tanto, estaríamos repitiendo un dígito[112], y por supuesto tampoco puede ser un número más grande porque si no F excedería a *nueve*.

Luego las *únicas* dos alternativas para E son 1 o 2.

Veamos cada una:

a) Si E = 1, en este caso tendríamos F = 3 + 4 + 1 = 8. Pero este caso *no puede ser tampoco*, porque de acuerdo con lo

www.elsolucionario.org

pedido en el planteo del problema, el número F *tiene que ser un número primo*. Luego, este caso queda excluido.

b) Si E = 2, en este caso tendríamos F = 3 + 4 + 2 = 9. Como el número 9 *tampoco* es un número primo, entonces este caso queda excluido también.

Primera conclusión: *nuestro* número *no puede empezar* con 3648.

La *única* chance que nos queda es explorar el caso 4819, que implica investigar la igualdad:

> 4 + 1 + E = F.

¿Qué posibilidades tiene el número E? Como F *no puede exceder a nueve*, y entre el 4 y el 1 ya suman 5, las posibilidades para E quedan reducidas a:

a) E = 2.
b) E = 3.

E no puede ser 4, porque este dígito ya está usado, ni mayor que 4 tampoco, porque si no F sería más grande que *nueve*.

Hemos llegado entonces a reducir *todas las posibilidades a dos casos:*

a) E = 2, en cuyo caso el número ABCDEF sería 481927.
b) E = 3, en cuyo caso el número ABCDEF sería 481938.

Como usted ve inmediatamente, el caso (a) es perfecto, porque se cumple todo. El número F resulta ser igual a 7, que es un número primo.

En cambio el caso (b) no puede suceder, ya que se repetiría el 8 como dígito (y además, 8 no es un número primo).

Conclusión: *el único número que cumple con todos los requisitos, es el número*

> 481927

Reflexión final

Si bien el objetivo era encontrar el número ABCDEF, que cumpliera con las seis restricciones que impusimos al principio, lo que más me interesa es remarcar el *trayecto* que seguimos para encontrarlo: analizar caso por caso y descartar diferentes posibilidades, porque no cumplían con los requisitos, hasta llegar a descubrir cuál era la *única* posibilidad para ABCDEF.

En definitiva, es un triunfo de la lógica. Como decía, es muy poco probable que uno tropiece en la vida con un problema de este tipo, pero lo que sí tenemos que hacer múltiples veces es optar frente a distintas alternativas, evaluar posibilidades, descartar algunas por inviables y aceptar otras porque nos convienen más. Y después, eventualmente, llegar a una conclusión. Y eso fue, ni más ni menos, lo que hicimos a lo largo de este problema.

www.elsolucionario.org

Puntos rojos y azules en el plano

El problema que quiero proponer ahora me lo contó Juan Sabia. Debo confesar que cada vez que Juan me envía algo para pensar, estoy seguro de que me tendrá entretenido por un tiempo. Más aún: se que me va a ayudar a recorrer algunos caminos previamente inexplorados. Es por eso que quiero trasladarle a usted esa misma sensación que tengo yo. Le sugiero que lea lo que sigue y, salvo que se le ocurra algo inmediatamente (cosa que a mí no me ocurrió), se permita disfrutar de tener «un problema no resuelto en la cabeza», y no lea la solución. Verá que valió la pena.

Suponga que uno tiene un plano (algo así como una hoja de papel pero que se extiende infinitamente en todas las direcciones) y que decide (también idealmente) pintar todos sus puntos usando solamente dos colores, digamos rojo y azul.

Fíjese qué interesante lo que sucede *siempre:* no importa cuál haya sido la forma en la que usted decidió pintar los puntos, *siempre* se puede encontrar un rectángulo que tenga los cuatro vértices del mismo color. ¿Notable, no? Ahora le toca a usted.

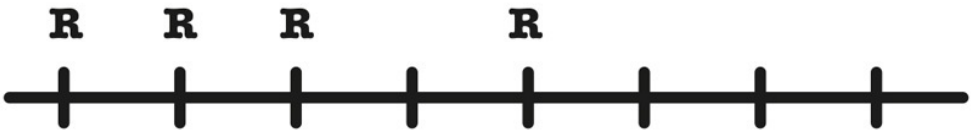
Solución

Voy a proponer acá una solución al problema que me envió Juan (Sabia). Por supuesto, estoy seguro de que está lejos de ser *única,* pero me pareció PRECIOSA por lo económica y visualmente tan evidente. Acompáñeme por acá.

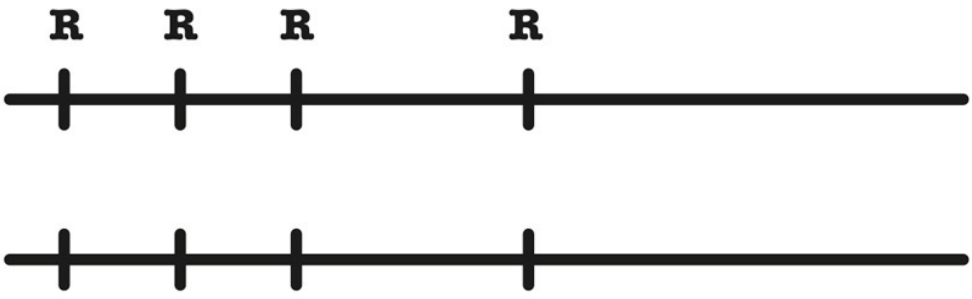
Elija *ocho* puntos cualquiera en cualquier recta del plano. Márquelos.

Como son ocho puntos, tiene que haber al menos *cuatro* de ellos que sean del mismo color (¿por qué?). Es que como hay dos colores solamente, si a lo sumo hubiera tres de cada color, tendríamos coloreados solamente seis puntos, pero todavía nos quedan dos más. Alguno de los colores *se tiene* que repetir.

Luego estamos *seguros* de que tiene que haber cuatro puntos del mismo color. Para fijar las ideas, digamos que son los cuatro de color rojo.



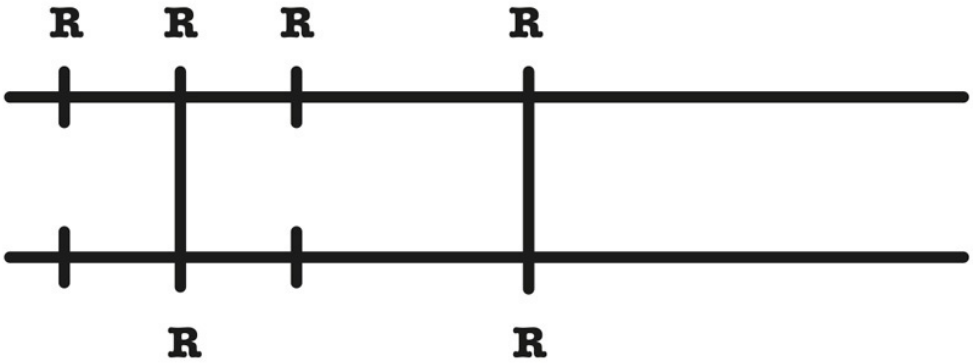
Tomemos esos cuatro puntos, y tome una recta cualquiera PARALELA que vaya por *debajo (o por encima)* de la recta en donde estaban los ocho puntos originales. Digamos que la eligió por debajo.



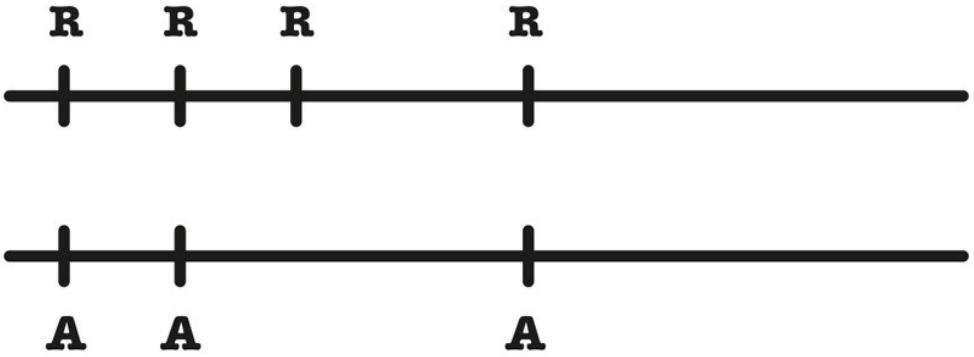
En esta nueva recta marque *exactamente* cuatro puntos que estén por debajo de los cuatro rojos que están sobre la primera recta. De estos cuatro puntos, tiene que haber al menos dos del mismo color (igual que en el argumento que figura antes, donde hay dos colores nada más, y cuatro puntos, al menos dos de los puntos —si no más— tienen que ser del mismo color).

www.elsolucionario.org

Estos dos puntos pueden ser rojos o azules. Si son rojos, se termina el problema, porque justo «arriba» de esos dos puntos rojos, en la primera recta, hay marcados dos puntos rojos también, y con ellos se puede formar el rectángulo que uno quiere.

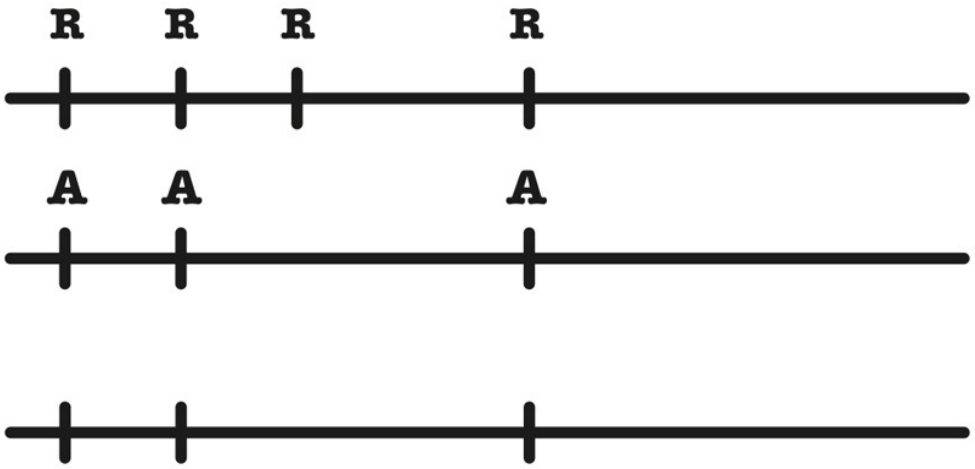


Sin embargo, podría pasar que no hubiera dos puntos rojos. En ese caso, tiene que haber tres puntos azules. Márquelos.



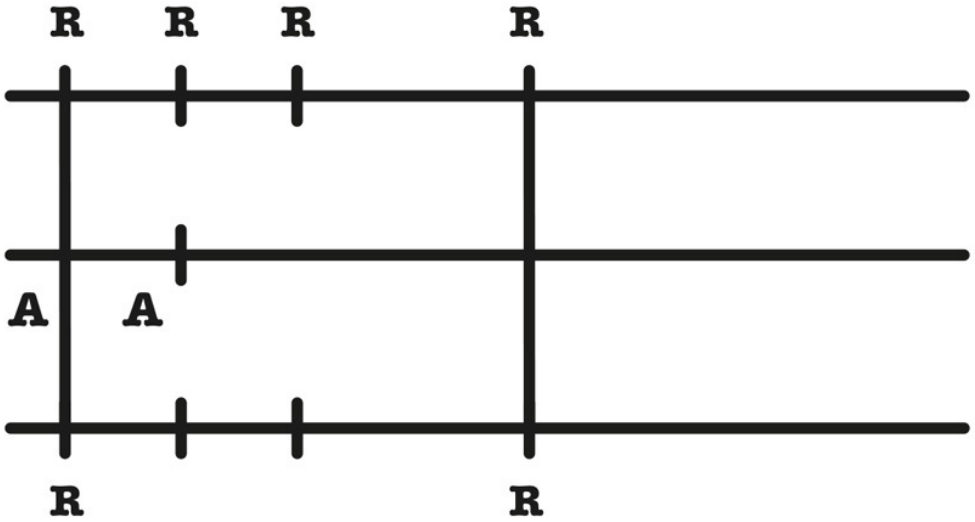
Ahora elija una tercera recta, paralela a las dos que ya eligió antes.

Marque tres puntos sobre esta recta, de modo que queden exactamente por debajo de los tres azules que hay en la segunda recta.



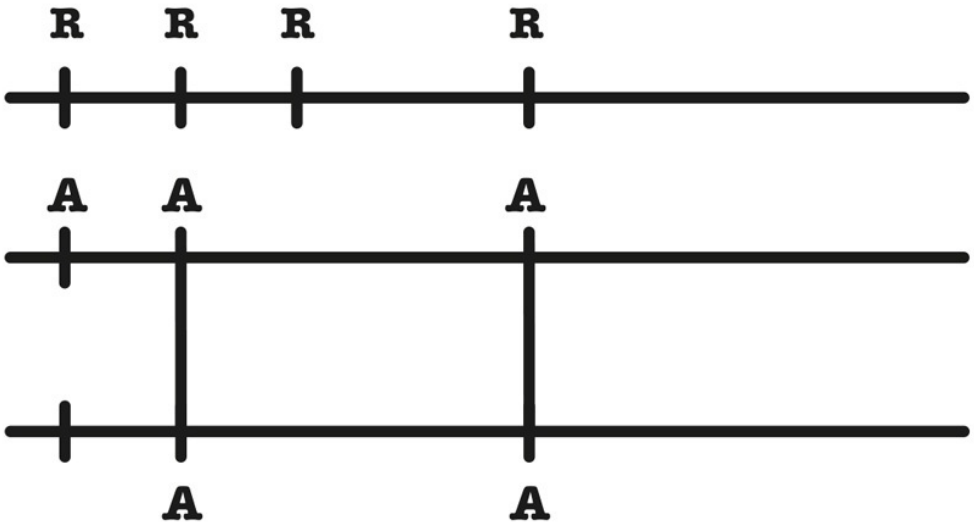
Aún no sabemos de qué color son estos tres puntos, pero lo que sí sabemos es que como son tres puntos y hay dos colores nada más, al menos dos (sino los tres) de esos puntos tienen que tener el mismo color.

Si hay dos rojos, usando los dos puntos rojos que hay por encima en la primera recta, se puede generar el rectángulo.



Si, en cambio, no hay dos rojos, sino dos azules, entonces, por encima de estos dos azules, tiene que haber en la segunda recta dos puntos azules también.

www.elsolucionario.org



Con estos cuatro puntos, uno se fabrica el rectángulo con los cuatro vértices del mismo color.

¿No es una demostración preciosa? Económica, elegante, inmediata. Todo el crédito entonces para Juan Sabia, quien no sólo me propuso el problema, sino que, además, me acercó esa solución.

Pregunta adicional

¿Cuántos rectángulos de este tipo se podrán construir en el plano?

Respuesta (piénsela usted antes, no se prive de la oportunidad de resolver el problema en soledad).

En realidad, si usted repasa los pasos que seguimos:

a) elegir ocho puntos en una recta;
b) elegir cuatro puntos (rojos o azules) en una segunda recta paralela a la primera;
c) elegir tres puntos en esta segunda recta (del mismo color);
d) elegir —eventualmente— una tercera recta paralela y en ella seleccionar ahora los puntos equivalentes a los tres puntos de la segunda recta.

Todos estos pasos nos dejan en total libertad para elegir las rectas (y los puntos también), por lo que la moraleja que deja es que uno podría replicar este proceso infinitamente y, por lo tanto, el número de rectángulos que tengan los cuatro vértices iguales en el plano es infinito.

Pregunta adicional 2

Suponga que ahora usted tiene un tablero para jugar al ajedrez. En lugar de usar las fichas tradicionales, usted tiene a su disposición 64 fichas blancas y 64 negras.

Elija la distribución de estas fichas hasta completar las 64 casillas del tablero. Si ahora yo le preguntara: ¿es posible encontrar *siempre* un rectángulo que tenga los cuatro vértices formado por fichas del mismo color?

¿Cuál sería su respuesta?

Su respuesta, si siguió todo lo que escribí, es que *sí*, que *siempre es posible*. Todo lo que hay que hacer es *replicar* la demostración que usamos para los puntos en el plano. Más aún: si bien no habrá *infinitos* rectángulos que cumplan con esta propiedad (la de tener los cuatro vértices del mismo color), seguro que tiene que haber muchos más que uno.

www.elsolucionario.org

5. MATEMÁGICA

Matemágica – Parte 1: abc – bca

Lo que sigue es, una vez más, una manera de mostrar cómo la *magia* está ligada a la matemática. Sígame. Tome un número de tres dígitos distintos cualesquiera. Digamos, por poner un ejemplo, 714 (usted, si quiere, haga sus propios cálculos mientras yo sigo con el 714).

Invierta el número. Es decir, haga de cuenta que lee el número de derecha a izquierda. En el caso del 714, tendremos 417.

Tengo ahora dos números de tres cifras (y usted también). Escriba el mayor arriba (como si fuera a restar) y el menor abajo. Ahora, réstelos.

“
$$\begin{array}{r} 714 \\ -\ 417 \\ \hline 297 \end{array}$$

Invierta este nuevo número. En mi caso queda 792.

Ahora, súmelos.

“
$$\begin{array}{r} 297 \\ +\ 792 \\ \hline 1.089 \end{array}$$

¿Cuánto le dio a usted? No me diga que *también* le dio *1.089…* ¿Sí? ¿Qué pasó entonces? O, mejor dicho, ¿por qué pasa lo que pasa?

La/lo dejo a usted sola/o para que revise las cuentas y trate de encontrar una explicación. Y, por otro lado, prepárese para proponerlo a sus amigos como una manera de desafiarlos a ellos también con lo que parece ser un truco de magia.

www.elsolucionario.org

Solución

Parece notable que cualquiera sea el número inicial, siempre terminemos con 1.089. ¿Qué pensó usted? Me imagino que debe de haber probado con varios y con todos le dio igual, pero ¿qué hacer para darse cuenta de que *siempre* ocurre lo mismo?

a) Al hacer la resta 714 – 417, se obtiene 297. Pero lo invito a descubrir que los dos números de las puntas (2 y 7) suman 9. Siempre, sin importar el número inicial que haya elegido.
b) Luego, al invertirlo y obtener 792, los dos de las puntas *siguen* sumando 9.
c) Cuando uno sume ahora 792 + 297, las dos puntas deberían dar 9. La de la derecha, efectivamente, resulta ser un 9.
d) El número del medio siempre resulta ser un 8, porque uno está sumando dos 9 y, por lo tanto, anota el 8 y se lleva el 1.
e) El de la punta izquierda, ahora, debería ser un 9 otra vez, pero como traemos un 1 de haber sumado en el medio, en lugar de un 9 tenemos un 10, y por eso el número total resulta ser 1.089.

Esto funciona, entonces, en el caso de que uno haya empezado con 714 (aunque asumo que a usted le pasó lo mismo con el número que eligió).

Ahora, ¿cómo convencerse de que esto sucede con cualquier número de tres cifras con el que uno empiece?

Empecemos con un número cualquiera que tenga tres dígitos distintos:

> abc

Supongamos que *a* es mayor que *c*. Entonces, para seguir con el procedimiento que ya usé, tenemos que restar:

> abc – cba

Aquí es donde quiero que nos convenzamos juntos de algunos hechos que voy a escribir. Pero más allá de leerlos, fíjese si usted puede llegar a las mismas conclusiones pensando sola/o cada uno de ellos. Y no se deje intimidar por lo que parece ser una «sopa de letras».

El número *abc* es una manera abreviada de escribir:

> (100a + 10b + c)

De la misma forma, el número *cba* se puede escribir así:

> (100c + 10 b + a)

Supongamos que *a* es mayor que *c*. Entonces, para seguir con el procedimiento que ya usé, tenemos que restar:

> *abc – cba*

que resulta igual a:

> (100a + 10b + c) – (100c + 10b + a)

Pero este último término es igual a:

> 99a – 99c = 99(a – c)

Por lo tanto,

> *abc – cba* = 99(*a – c*) (*)

¿Cómo interpretar esta última igualdad? ¿Qué se deduce de (*)?

www.elsolucionario.org

Por un lado, dice que el número *abc – cba* es *siempre* múltiplo de 99.

Por otro lado, analicemos cuáles son todos los posibles valores de (*a – c*).

Fíjese que como los dígitos *a, b y c* son todos distintos, entonces (a – c) tiene que ser un número que esté entre 1 y 9. ¿Por qué?

Haga la cuenta conmigo: el mayor valor que puede tomar *a* es 9, y el menor valor que puede tomar *c* es 0. Luego, su diferencia es 9.

¿Y cuál es el menor valor que puede tomar (a – c)? No puede ser *cero* porque *a* y *c* tienen que ser distintos, pero sí puede ser 1 (por ejemplo si *a = 2* y *c =* 1).

Luego, como el mayor valor posible para (*a – c*) es 9, y el menor valor es 1, ¿cuáles son *todos* los posibles valores para (*abc – cba*)?

> 99 x 1 = 99
>
> 99 x 2 = 198
>
> 99 x 3 = 297
>
> 99 x 4 = 396
>
> 99 x 5 = 495 (**)
>
> 99 x 6 = 594
>
> 99 x 7 = 693
>
> 99 x 8 = 792
>
> 99 x 9 = 891

Todo lo que resta por hacer es comprobar que el resultado funciona con estos nueve números que figuran en (**).

> 099 + 990 = 1.089

198 + 891 = 1.089

297 + 792 = 1.089 (***)

396 + 693 = 1.089

495 + 594 = 1.089

594 + 495 = 1.089

693 + 396 = 1.089

792 + 297 = 1.089

891 + 198 = 1.089

990 + 099 = 1.089[113]

En consecuencia, la *clave* para la demostración, fue haber descubierto que:

> (abc – bca) = 99 (a – c)

y esta igualdad nos permitió reducir el problema a analizar nada más que nueve casos. Como en todos ellos funciona lo que queríamos comprobar, el problema quedó resuelto.

www.elsolucionario.org

Matemágica – Parte 2: Un juego de cartas

La magia tiene siempre un costado muy atractivo. Están aquellos que se sientan a disfrutar de lo que hace un mago y de dejarse seducir, sin pretender mucho más que tratar de pasar un rato agradable. En el otro extremo, están aquellos que cada vez que están con un mago disfrutan de recorrer otro camino: *descubrir cómo hace el mago para engañar a sus interlocutores.* En general, me inclino por la primera de las dos alternativas, pero con algunas excepciones: cuando advierto que puede haber algo de matemática involucrada, o *matemágica*, entonces sí me interesa detectar por qué pasa lo que pasa.

El siguiente es un caso típico en donde aparece una combinación de «magia» y matemática. Sígame y tratemos de detectar por qué funciona. Acá va.

Un mago toma un mazo de cartas y selecciona 27 cartas cualquiera. A los efectos de hacer más sencilla la explicación, supongamos que las cartas están numeradas del 1 hasta el 27[114].

El prestidigitador las distribuye formando tres columnas, con nueve cartas cada una siguiendo la numeración que se ve a continuación.

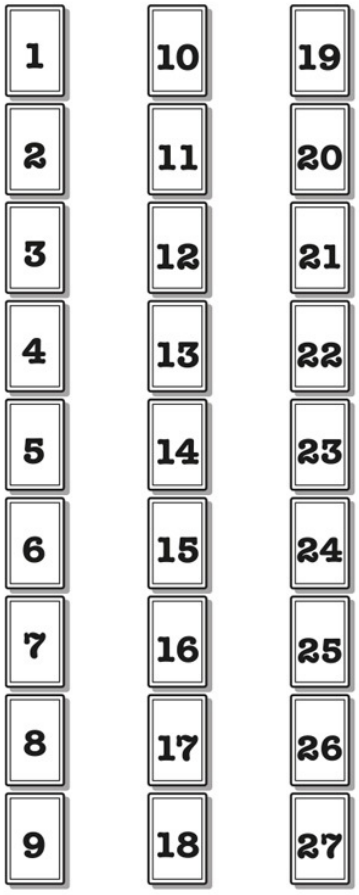


Fig. 1

El mago le dice que elija «mentalmente» una de las cartas. No hace falta que la toque ni que la separe. Sólo tiene que seleccionar una y él se ocupará en *descubrir* qué carta pensó usted. Para ello le va a pedir que siga algunos pasos.

Primero le pregunta: «¿En cuál de las tres columnas está la carta que eligió?». Supongamos que usted contesta que está en la segunda columna.

El mago entonces junta las nueve cartas de cada columna (sin alterarles el orden) y forma una pila con cada una de ellas. O sea, ahora quedan formadas tres pilas con nueve cartas cada una.

Usted ve que el mago pone las tres pilas una arriba de la otra y ahora tiene otra vez las 27 cartas todas juntas. Y luego sigue: vuelve a formar otra vez tres columnas con nueve cartas cada una. Pero no lo hace de cualquier forma, sino que va llenando primero la primera fila (con tres cartas), después la

www.elsolucionario.org

segunda fila (con otras tres cartas), y así siguiendo, hasta completar la novena fila.

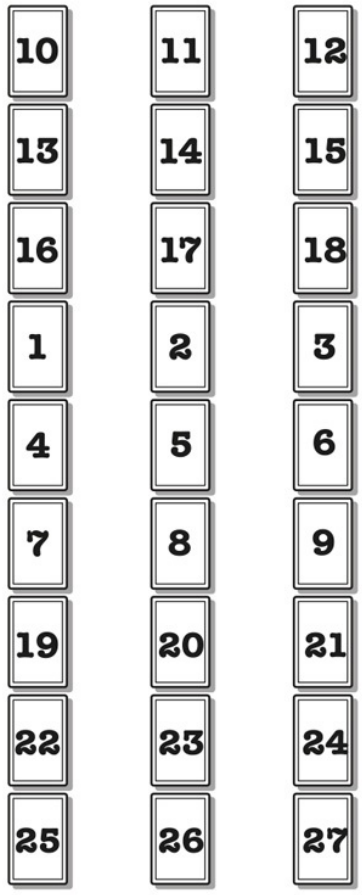


Fig. 2

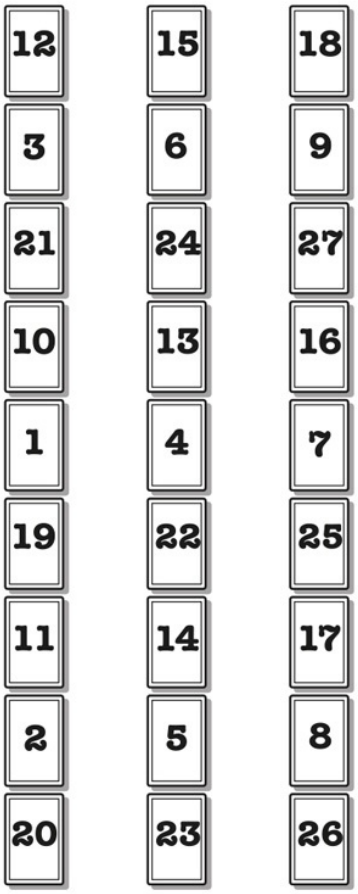
Quedaron formadas, *nuevamente*, tres columnas con nueve cartas cada una.

El mago le pide ahora que usted vuelva a contestar la misma pregunta que le hizo antes: «¿En qué columna está ahora la carta que usted había elegido?».

Supongamos que usted ahora dice que la carta que usted seleccionó está en la tercera columna.

El mago vuelve a repetir el procedimiento anterior: junta las cartas de las tres columnas, y forma con ellas una nueva pila con las 27 cartas. Y una vez más, las distribuye fila por fila formando otra vez tres columnas de nueve cartas cada una.

Fig. 3



Llegado a este punto, el mago pregunta (por última vez): «¿En qué columna está la carta que usted había elegido mentalmente?». Y una vez más, supongamos que usted contestara: «Está en la primera columna».

El mago entonces dice: «*¡La carta que usted eligió fue la que lleva el número 12!*».

Usted se queda asombrado y aturdido: ¿cómo hizo?

Eso. ¿Cómo hizo? De eso se trata esta historia: de poder descubrir qué es lo que hace el *mago* para poder descubrir la carta que usted pensó pero que nunca le comunicó a nadie. Solamente usted sabía cuál era. Las preguntas que yo tengo para usted son: ¿por qué funciona? ¿Qué hizo el mago? ¿Cómo distribuye las cartas?

La respuesta se la dejo a usted. Yo, sigo más adelante.

www.elsolucionario.org

Respuesta

Primero quiero invitarla/invitarlo a pensar lo que hace el mago.

En principio, cuando tiene las primeras tres columnas (como se ve en figura 1) y usted le dice que la carta que eligió está en la segunda, el mago procede de la siguiente forma: junta cada una de las tres columnas y forma con ellas tres pilas.

Pone *las cartas de la segunda columna arriba de todo*, y después agrega debajo las restantes 18 cartas de las dos columnas restantes. O sea, en la nueva *pila* que formó con las 27 cartas, las primeras *nueve* corresponden a las de la columna en la que está la carta que usted eligió.

Antes de avanzar: como usted advierte, en el momento en el que usted le dice al mago que *su* carta está en la segunda columna, está *angostando* el número de posibilidades: ahora, el mago *sabe* que su carta está entre las nueve cartas de la segunda columna, y no entre las 27 que potencialmente usted podría haber elegido. Su carta tiene que ser *una* de estas nueve: 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17 o 18.

El segundo paso es *observar cómo el mago distribuye las 27 cartas en tres columnas.* Las columnas ahora son diferentes. Si usted mira en la figura 2, verá que las *nueve cartas entre las que está la suya* ocupan las tres primeras FILAS de las tres columnas. O sea, él va llenando primero fila por fila hasta completar las tres columnas.

En el momento que usted le señala al mago que su carta está en alguna parte de la tercera columna, al mago ya no le importan más las cartas que figuran *debajo* de la tercera fila (de la cuarta en adelante) porque él ya sabe que *tiene* que estar en las tres primeras filas. En consecuencia, cuando usted le dice que está en la tercera fila, él ya sabe que tiene que ser una de las siguientes tres cartas: 12, 15 o 18 (ya que son las tres cartas que figuran en la tercera columna y están en las tres primeras filas).

El mago vuelve a juntar todas las cartas (respetando el orden) pero poniendo *arriba de todo* las cartas de la tercera columna (que son 12, 15, 18, 3, 6, 9, 21, 24, 27). Ahora, las vuelve a distribuir *por filas*, hasta completar las tres columnas. Si uno mira la figura 3, descubre que su carta tiene que estar en la

primera fila. O sea, tiene que ser una de las cartas de arriba de cada una de las columnas.

Una vez más, cuando usted le contesta al mago en qué columna está la carta que usted eligió, él ya sabe que esa es *toda* la información que necesita para saber qué carta es. En este caso, al mirar la figura 3 y haberle dicho que su carta está en la primera columna, es como si usted le hubiera dicho: «Mi carta es la número 12». Y así fue (o es).

En definitiva, y resumiendo, con cada pregunta el mago divide por *tres* el número de posibles cartas. Primero, cuando usted contestó que estaba en la segunda columna, pasó de potenciales 27 cartas a *nueve*. Con la segunda pregunta, cuando usted contestó que estaba en la tercera columna, él redujo las posibilidades de nueve a tres. Y, por último, con la tercera pregunta, al haber contestado que estaba en la primera columna, usted mismo le *dijo* al mago cuál era, cuando redujo de tres a una. Y eso es todo lo que le hacía falta para poder *adivinar/deducir* qué carta era.

Sugerencia final

Si estuviera junto con usted en este momento, le sugeriría que *haga el experimento con las cartas con usted mismo.* Intente nuevos ejemplos hasta convencerse de que entendió la idea, y que ya está en condiciones de hacer de mago usted mismo. Y allí sentirá, entonces, que gobernó, al menos por un instante, la fusión entre magia y matemática. Yo agregaré un nuevo ejemplo para que usted pueda verificar el procedimiento, pero nada que yo haga podrá suplir que usted lo haga por su cuenta.

Ejemplo 2

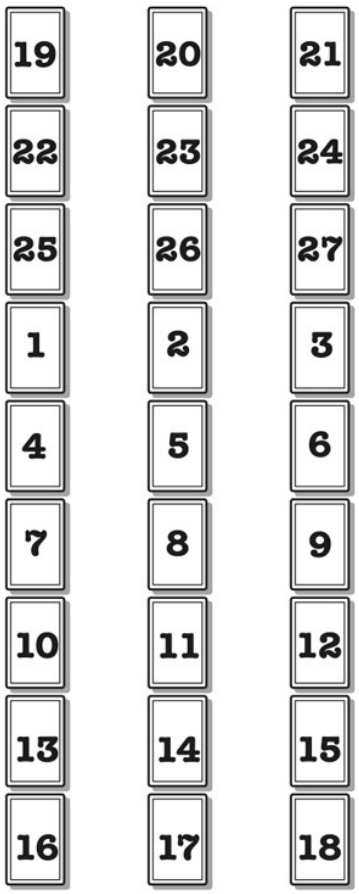
Supongamos que yo elijo la carta número 23.

Mirando la figura 1, uno contesta la primera pregunta diciendo que el número está en la tercera columna.

Ahora, el mago armaría estas tres nuevas columnas (inténtelo por su cuenta, evitando leer lo que sigue).

www.elsolucionario.org

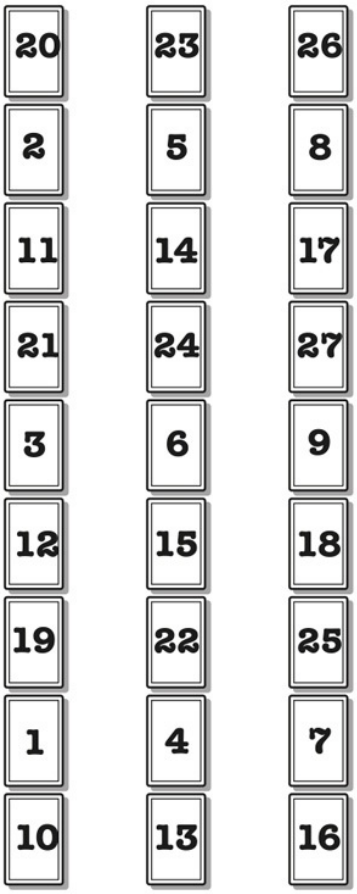
Fig. 4



La siguiente respuesta será: «La carta (el número 23) está en la segunda columna)».

Entonces el mago formaría —por última vez— estas tres nuevas columnas (ya que pondría en las primeras tres filas las nueve cartas de la segunda columna):

Fig. 5



Cuando usted conteste que la carta está —una vez más— en la segunda columna, como el mago ya sabe que tiene que ser *alguna* de las tres que figuran en la primera fila, es como haberle *indicado* cuál era la carta elegida: él sabrá inmediatamente que es el número 23.

www.elsolucionario.org

Juan Sabia, el mago y sus ayudantes de lujo. Problemas 1 y 2

Juan Sabia es doctor en Matemática. Es, además, escritor de libros de cuentos para niños. Es uno de los profesores líderes del ciclo básico común en la Universidad de Buenos Aires. Es, por sobre todas las cosas, un gran amigo. Dotado de una sensibilidad muy particular, fue siempre un gusto trabajar con él en la Facultad de Ciencias Exactas (UBA). Además, es uno de los *betatesters* de los libros que fui escribiendo con el tiempo, pero más aún, fue quien me proveyó varios de los problemas que aparecieron publicados y, esencialmente, me aportó también *soluciones* mucho más breves y elegantes que las que se me fueron ocurriendo a mí.

El 20 de diciembre de 2011 le escribí un mail para preguntarle cómo estaba con su trabajo, más intenso cuando termina el año, y me contestó casi «lacónicamente» lo siguiente:

> Hola, Adrián. ¿Qué tal?
> Yo bien, ya más tranqui con respecto al laburo. Acá te mando un par de problemas para pensar. El primero es una versión fácil que se me ocurrió a mí. El segundo es un truco de cartas conocido, creo.
> Te mando abrazo.
> Cuando quieras, tipeo la solución (bah, cuando pueda la tipeo y te la mando, y vos la chusmeás cuando quieras).
> Otro abrazo,
>
> Juan

Y lo que quiero hacer acá es —justamente— transcribir los enunciados (y más adelante las soluciones) a los dos problemas sobre cartas, magos y ayudantes que me propuso Juan. Acá van[115].

Primer problema

Se toman cinco cartones pintados de un solo lado: hay uno de color azul, uno blanco, uno negro, uno rojo y uno verde. Los cartones son indistinguibles del otro lado. Se le pide a alguien que los ponga en fila de izquierda a derecha en cualquier orden boca abajo de forma tal que no se vea el color de cada uno (el mago no debe saber en qué orden están). El ayudante del mago mira qué color hay en cada cartón sin que el mago lo vea. Entonces elige uno para dar vuelta primero y otro para dar vuelta después a la vista del mago.

El mago descubre de qué color es cada uno de los otros tres cartones. Aplausos, gritos de sorpresa, hasta un desmayo (pero puede ser por el calor…).

¿Cómo funciona el truco?

Acá es donde le toca a usted tratar de pensar. Si le sirve como ayuda (y no lea lo que sigue si no tiene ganas *aún* de que nadie lo «ayude») yo *numeré* las cartas o cartones, o si prefiere, numeré los colores (simplemente porque me es más fácil trabajar con ellos), pero también hubiera podido usar las letras A, B, N, R y V (por Azul, Blanco, Negro, Rojo y Verde).

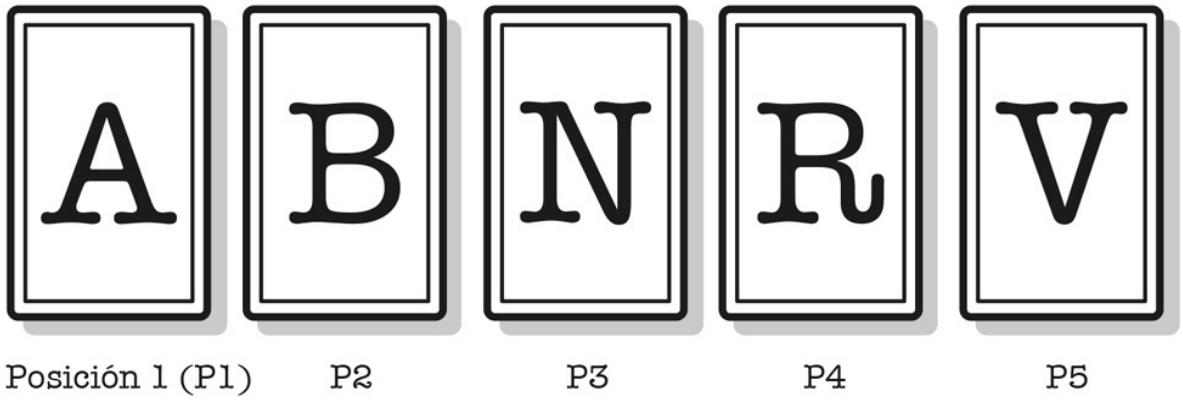
Solución

Número los cartones de colores del 1 al 5.

Una vez dispuestos sobre la mesa, el ayudante se fija primero en donde está el número 5, que puede ocupar —obviamente— cualquiera de las *cinco* posiciones.

Llamemos P1, P2, P3, P4 y P5 a esas posiciones.

www.elsolucionario.org



Como el ayudante tiene que dar vuelta dos cartas, lo hará en cierto orden. Acá es donde me apuro en señalar que importarán dos cosas:

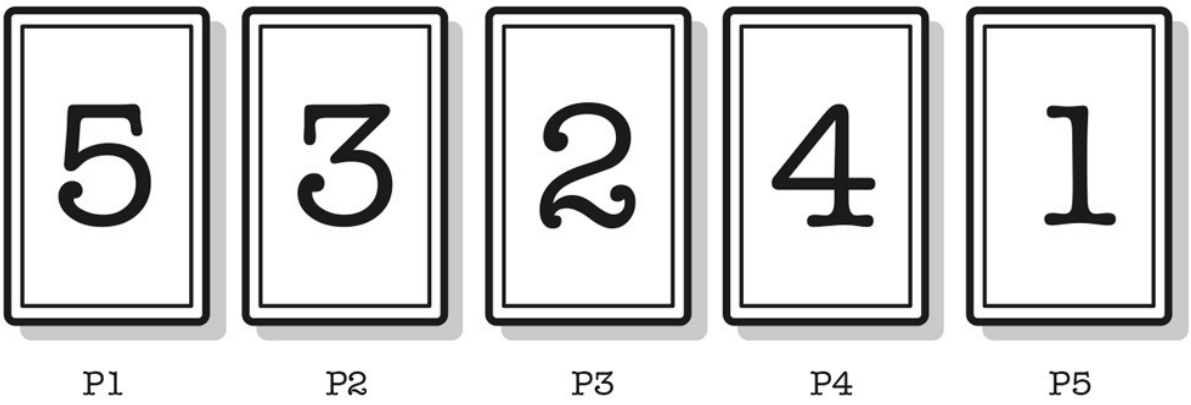
a) qué cartas da vuelta,
b) y el *orden* en el que las da vuelta.

Quiero distinguir acá dos de las cinco posibilidades en donde se puede encontrar el número 5: la posición P1 y la posición P5. O sea, si el número 5 ocupa el lugar de la primera carta o de la última.

Supongamos que está en la primera posición (P1). En ese caso, el ayudante *dará vuelta* las dos cartas siguientes (las que están en las posiciones P2 y P3). Pero todavía falta determinar *el orden* en el que las dará vuelta. El mago ya sabe (al ver que el ayudante dio vuelta las cartas en las posiciones P2 y P3) que el número 5 está en el primer lugar. Como el mago verá las dos cartas que dé vuelta el ayudante, sabrá cuáles son los tres números que faltan (y que están tapados). Pero, como decía, ya sabe que el 5 está en primer lugar. Lo único que le falta saber es el orden en el que están dispuestos los números en las posiciones P4 y P5. Si esos dos números están en orden, entonces el ayudante da vuelta las cartas en las posiciones P2 y P3 en orden creciente. Si en cambio las cartas en posiciones P4 y P5 están en forma *decreciente*, entonces el ayudante da vuelta las cartas en las posiciones P2 y P3 en forma decreciente también.

Esto concluye este caso.

Por ejemplo, si los números estuvieran dispuestos de esta forma:



Entonces el ayudante *tiene* que dar vuelta las cartas que están en las posiciones P2 y P3 (que son 3 y 2, respectivamente). El mago ya sabe que el 5 va en el primer lugar (por eso el ayudante dio vuelta esas dos cartas y «aisló» al 5 al principio). Pero le falta saber si las dos cartas —además del 5— que no ve (o sea, el 4 y el 1) en qué orden están. Bien: acá es donde el ayudante, al dar vuelta las cartas en orden decreciente, primero el 3 y después el 2, le está indicando al mago que las cartas que le faltan (4 y 1) están en orden decreciente también.

Si usted me pudo seguir con este razonamiento, puedo avanzar para el caso en el que el número 5 esté en la última posición (o sea P5). En este caso, el ayudante da vuelta las dos cartas anteriores a la última, las que figuran en la posición P3 y P4. El mago ya sabe que el número 5 está en P5 (porque el ayudante dio vuelta las cartas de P3 y P4), pero le falta saber en qué orden están las cartas que figuran en P1 y P2. El (el mago) sabe cuáles son las cartas, pero no sabe el orden. Entonces el ayudante, al dar vuelta las cartas de P3 y P4 en orden creciente, le indica al mago que así están dispuestas las cartas que le faltan descubrir. Si estuvieran en forma decreciente, él también (el ayudante) haría lo mismo: las descubriría en forma decreciente.

Por último, quedan por abordar tres casos más: cuando el número 5 está en las posiciones P2 o P3 o P4. En cualquiera de estos casos, lo que el ayudante hace para *indicarle* al mago en donde está el número 5, es *encerrarlo* entre las dos cartas que va a descubrir.

Es decir: si el número 5 está en la posición P2, entonces el ayudante dará vuelta las cartas que figuran en las posiciones P1 y P3, respectivamente. Si el

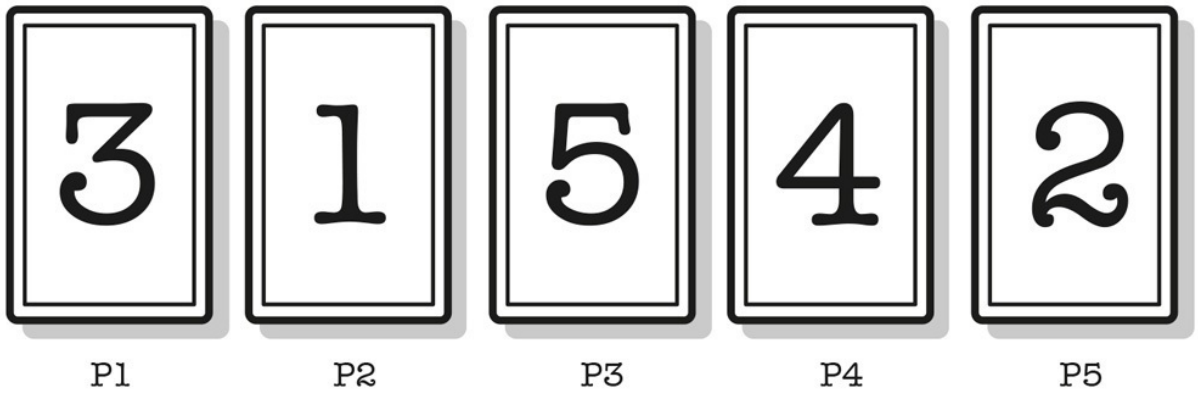
www.elsolucionario.org

número 5 estuviera en la posición P3, entonces el ayudante daría vuelta las cartas que están en P2 y P4, y para terminar, si el 5 estuviera en la posición P4, entonces el ayudante, daría vuelta las cartas que están en las posiciones P3 y P5.

¿Cómo hacer luego para indicarle en qué orden figuran las otras dos? El ayudante puede usar la misma *idea* que ya describí. Como el ayudante *sabe* en qué orden figuran esas cartas (las que le faltan al mago), se *fija* si están en orden creciente o decreciente. En cualquiera de los dos casos, todo lo que necesita hacer es *replicar* ese orden con lo que él haga al dar vuelta las cartas, *preservando el orden de crecimiento o decrecimiento.*

Ejemplo final:

Si las cartas están dispuestas así:



Entonces el ayudante tiene que dar vuelta (¿lo quiere pensar usted?) las cartas 1 y 4, respectivamente. Pero como las dos que restan (además del 5 que quedó encerrado entre las dos que el ayudante dará vuelta), el 3 y el 2 están en orden decreciente, entonces el que colabora con el mago da vuelta *primero el 4* y después *el 1*, de manera tal de darle la señal al mago de que tiene que pensar las dos que le faltan en orden *decreciente.*

Y listo. ¿No es precioso el problema que propuso Juan? Por supuesto, la estrategia que yo desarrollé fue la que se me ocurrió a mí. No hay *ninguna razón* para pensar que no haya otras mejores, o en todo caso, la que se le ocurrió a usted es la que tiene que hacerla/lo sentir pleno, porque es la propia

la que más vale. Las otras pueden ser muy bonitas, pero las propias tienen un encanto especial, ¿no es así?

Segundo problema

El que sigue es el enunciado del segundo problema. Sobre éste en particular, Juan me escribió: «es más difícil, y creo que es muy conocido».

Está advertido usted, entonces: puede que sea más difícil y podría ser que fuera muy conocido. En cualquier caso, a mí me pareció un problema precioso. Acá va el enunciado original de Juan.

Se toman las 52 barajas de un mazo de poker (sin los comodines). Se le pide a alguien que elija cinco cartas cualesquiera y las ponga en fila de izquierda a derecha boca abajo en cualquier orden (el mago no debe ver qué cartas son). El ayudante del mago mira qué cartas son sin que el mago las vea. Entonces elige dar vueltas, una a una, cuatro de las cinco cartas a la vista del mago. El mago piensa un rato y adivina el número y el palo de la quinta carta. Más aplausos, exclamaciones y un estornudo.

¿Cómo funciona el truco?

Solución

¿Cómo funciona el truco? ¿Cómo hacer? Es decir, suponga que usted es el mago y yo soy su ayudante. Yo veo las cinco cartas y el juego me permite dar vuelta cuatro de las cinco (en algún orden) de manera tal de que usted (que es mi cómplice) pueda descubrir cuál la *quinta* carta que no se ve. ¿Cómo hago yo para *indicarle* cuál carta queda sin descubrir?

Empiezo a elaborar algunas ideas y le pido que me acompañe. Pongámonos de acuerdo en establecer algunos datos. Como las cartas francesas (con las que estamos haciendo este juego) tienen cuatro *palos* diferentes, corazón (rojo), diamante (también rojo), trébol (negro) y pica (negro), entonces, como en total hay cinco cartas es *obligatorio* que al menos dos de los palos sean iguales. Esta observación es muy importante. Alguno de los palos *se tiene* que repetir.

www.elsolucionario.org

Yo, en tanto que ayudante suyo, soy el que toma la determinación de *qué carta* quedará sin dar vuelta (la que usted, en tanto que mago tendrá que descubrir). Esa carta que yo voy a elegir para usted, será una de las dos (o más) cuyo palo se repite. Juntos, usted y yo, hemos ya diseñado una estrategia que me permitirá guiarlo a usted a la carta que falta. Usted no sabe todavía cuál es. Yo sí.

Como decía, en el momento en que yo vea las cinco cartas, yo voy a advertir inmediatamente *qué palo* se repite. Si hubiera dos palos repetidos, elijo uno cualquiera, no importa cuál.

Lo que sí forma parte de la estrategia, es que cuando yo de vuelta la PRIMERA carta y usted, como mago, vea el palo de esa carta, eso le indicará a *de qué palo* es la carta X que usted tendrá que descubrir.

Una vez que hemos resuelto el tema del «palo», ahora necesito comunicarle *cuál es la carta X.*

Quiero exhibir acá un ejemplo que le va a dar una idea de lo que quiero hacer. Supongamos que las dos cartas del mismo palo que hay son de trébol, el 2 y el 8 de trébol. Ya establecimos que yo (en tanto que su ayudante) voy a elegir cuál es X. En este caso, voy a elegir al 8 como la carta que usted tiene que adivinar/deducir.

Yo ya di vuelta el 2 de trébol, y usted vio lo que hice. Ahora, ¿cómo hago yo para decirle que lo que usted tiene que hacer *es sumarle seis* a la carta que yo le muestro?

Es decir, yo tengo que encontrar una forma de indicarle que le *sume seis* a la carta que yo di vuelta. ¿Cómo le transmito el número seis?

Acá es donde entran en juego las tres cartas que todavía no dimos vuelta. Yo las vi, pero usted no. No puedo hacer que aparezca un seis entre ellas, si no, sería fácil. Si yo supiera que va a haber un seis entre esas tres cartas, entonces lo doy vuelta y listo. Pero, obviamente, *no hay garantías* de que haya un seis. O sea, por ese camino, no voy a poder progresar. ¿Y si me fijo de cuántas formas las puedo *ordenar* a estas tres cartas A, B y C?

Fíjese en lo siguiente. Como tenemos las tres cartas A, B y C, yo puedo decidir en qué *orden* se las muestro, o lo que es lo mismo, en qué orden se las

voy mostrando a usted. ¿Cuántas maneras posibles de ordenar estas tres cartas hay? Contemos…

> ABC, ACB, BAC, BCA, CAB y CBA (*)

Es decir, hay *exactamente seis formas de ordenarlas.*

Perfecto. Lo que tenemos que hacer es ponernos de acuerdo en cómo ordenar las cartas del mazo, de manera tal que entre usted y yo, ya hayamos establecido un código que nos permita decidir un cierto orden.

Uno podría decir: «Ordénelas en forma creciente». De acuerdo. Si las cartas son un 7, un 3 y una J, entonces podríamos establecer que:

> A = 3, B = 7 y C = J

¿Se entiende por qué? Es que estoy ordenando las cartas en forma creciente teniendo en cuenta los números: el 3 es menor que el 7 y el 7 es menor que la J (que sería equivalente a un 11).

Ya sé, la pregunta que surge inmediatamente es: ¿y qué pasa si hay dos números 3, por ejemplo? ¿Cuál de los dos ponemos primero?

Bien, en ese caso, nos ponemos de acuerdo en *ordenar los palos también.* Es decir, el mago y yo elegimos (en forma arbitraria) un *orden* para los palos y establecemos este orden: primero corazones, segundo diamantes, tercero tréboles y cuarto picas. Entonces, supongamos que tuviera que ordenar estas tres cartas: 3 de pica, 3 de diamante y J de corazón, resultaría:

- A = 3 de diamante (porque el diamante viene antes que la pica)
- B = 3 de pica (ya que el número 3 viene antes que la J)
- C = J de corazón (ya que la J es la más grande de las tres cartas)

De esta forma, estableciendo un orden para los palos, logramos *desempatar*, si es que se llegara a esa situación.

www.elsolucionario.org

Ahora ya sabemos *ordenar* tres cartas. Y también sabemos que hay *seis formas de ordenar tres cartas —ver (*)—*. Podemos asignarle un número a cada orden que figura en (*). Es decir, podemos ponernos de acuerdo en la siguiente estrategia:

Si yo ordeno las cartas en forma ABC, eso le indica al mago que tiene que sumar un número 1.

Si yo ordeno las cartas en forma ACB, eso le indica al mago que tiene que sumar un número 2.

De la misma forma, el orden BAC indica un número 3, BCA indica un número 4, CAB un número 5 y CBA un número 6.

Resumiendo se tiene:

> ABC = 1
>
> ACB = 2
>
> AC = 3 (**)
>
> BCA = 4
>
> CAB = 5
>
> CBA = 6

Por ejemplo, si las cartas fueran como en el ejemplo anterior, un 3 de diamante, una J de pica y un 7 de corazón, y yo quiero indicarle al mago que le sume 6 a la carta que yo di vuelta primero, entonces hacemos así:

Primero, ordenamos las tres cartas:

- A = 3 de diamante
- B = 7 de corazón
- C = J de pique

De acuerdo con (*) y (**) yo necesito mostrarle al mago las tres cartas en orden CBA, para indicarle que le sume 6.

Es decir, doy vuelta primero la J de pica, después el 7 de corazón y luego el 3 de diamante. Esto le indica al mago que es el orden CBA y por lo tanto, él sabe que tiene que sumarle un número 6 a la carta que yo le mostré primero (que había sido un 2 de trébol).

Luego, como él ya sabía que la carta X era de trébol (porque la primera que yo di vuelta, el 2 de trébol, lo primero que hacía era indicarle el *palo*), basta con que ahora sepa que le tiene que sumar 6 para deducir que la carta X es el 8 de trébol.

Nota

Yo intuyo que usted tiene una pregunta muy importante que todavía no fue contestada acerca de qué pasaría, por ejemplo, si una carta es el 2 de trébol y la otra la K de trébol. En ese caso, habría que sumar 11. ¿Cómo habría que hacer allí si a lo sumo hay seis posibles órdenes para las tres cartas? De todas formas, antes de avanzar en esa dirección, permítame poner un ejemplo más, e inmediatamente después abordaremos juntos ese problema.

Otro ejemplo. Supongamos que yo veo estas cinco cartas:

- J de pica
- 7 de trébol
- J de diamante
- 5 de corazón
- 9 de corazón

¿Qué hacemos? ¿No tiene ganas de pensar un rato usted por las suyas?

Yo, mientras tanto, sigo por acá. Estos son los pasos a dar. Fíjese si usted está de acuerdo.

1) Tengo que elegir la carta X. Para eso, me fijo en el palo que se repite (seguro que tiene que haber uno). En este caso, es

www.elsolucionario.org

corazón. Luego, las dos cartas que «separo» son el 5 y el 9 de corazón.

2) Elijo X = 9 de corazón.
3) La carta que voy a dar vuelta primero es el 5 de corazón.
4) Cuando usted vea el 5 de corazón, ya sabrá que la carta X será de corazón, pero no sabe cuál.
5) Yo tengo que avisarle a usted (el mago) que tiene que sumarle *cuatro* al 5 de corazón que yo di vuelta primero.
6) Tengo que ordenar las tres cartas que quedan: J de pica, 7 de trébol y J de diamante. Como hay un empate (las dos J), habíamos establecido que el orden era: corazón, diamante, trébol y pica. Entonces, el orden de las tres cartas es: A = 7 de trébol, B = J de diamante y C = J de pica.
7) Ahora necesito que usted le sume *cuatro,* por lo que necesito fijarme en la *tabla* (**), y darlas vuelta en el orden BCA (que es igual a 4).
8) Luego doy vuelta las cartas en este orden: primero la J de diamante, después la J de pica y por último el 7 de trébol.
9) Ahora sí, usted ya sabe que la carta X es el 9 de corazón.

Para terminar, falta contestar una pregunta importante: ¿qué pasaría por ejemplo si una de las cartas que repiten el palo es el 2 de trébol y la otra, la Q de trébol también? La Q correspondería al número 12 y por lo tanto, si yo eligiera la Q como la carta X y doy vuelta el 2 de trébol, usted sabría que la carta X es de trébol, pero ¿cómo le digo yo ahora que sume *diez* si los órdenes posibles son seis —tal como figura en (**)—?

Lo que uno podría hacer es establecer que, al ordenar las cartas, no detenerse en la K como la carta más alta, sino que seguir en forma *circular.* ¿Qué quiero decir con esto? Fíjese**[116]** que uno podría poner un orden que *continúe* aunque uno llegue a las cartas «más grandes».

Tendríamos un ordenamiento del siguiente tipo:

> “
> A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K, A, 2, 3, 4, 5, 6, 7…
> (***)

Es decir, como cuando uno «arma una escalera» en alguno de los juegos de cartas, las cartas no «terminan» en la más alta, la K, sino que siguen en forma circular.

En ese caso, con esta nueva «idea» para poder «jugar», si uno tuviera el 2 de trébol y la Q de trébol, por ejemplo, entonces, en lugar de elegir como X la Q y como carta para dar vuelta primero el 2, lo que podría hacer es elegir como X al 2, y como primera carta a la Q. En este caso, si usted se fija en el ordenamiento que figura en (***), la «distancia» que hay entre la Q y el 2 es ahora de *¡tres unidades!* Es decir, uno tendría que decirle al mago que le *sume tres* a la Q, y eso es algo que podemos hacer de la misma forma que antes (ordenando las tres cartas que quedan).

En resumen, con esta nueva «idea» cualquier par de cartas de (***) está «a lo sumo» a seis lugares de distancia y, por lo tanto, el orden en el que dé vuelta las tres cartas será suficiente para indicarle al mago lo que tiene que hacer.

Ahora sí, el problema queda resuelto totalmente. La/lo invito a que lo investigue usted con ejemplos que usted mismo puede preparar y desafiarse junto con algún amigo.

Para terminar, le propongo un último ejemplo. Supongamos que las cinco cartas que uno le ofrece al asistente son las siguientes: 5 de diamante, 5 de trébol, 5 de pica, Q de pica y 2 de corazón. ¿Qué haría usted? Mientras usted piensa, yo escribo la «solución»:

1) Elegir las cartas del mismo palo, el 5 y la Q de pica.
2) La carta X es el 5 de pica.
3) La primera carta que doy vuelta es la Q de pica.
4) La distancia entre la Q y el 5 es de seis unidades —verifíquelo con (***)—.
5) Asignamos estas letras para ordenar las tres cartas que quedan: A = 2 de corazón, B = 5 de diamante y C = 5 de trébol.
6) Como tenemos que advertirle al mago que le sume *seis* unidades a la Q (de pica), entonces mirando la tabla (**), necesitamos el orden CBA, o sea, damos vuelta las tres cartas en el siguiente orden: 5 de trébol, 5 de diamante y luego el 2 de corazón.

www.elsolucionario.org

Moraleja

Este problema es muy conocido, como me escribió Juan Sabia en su correo electrónico. Es sobre todo muy conocido dentro del mundo de los magos, pero para poder practicarlo es necesario haber apelado a la matemática, que es quien proveyó la herramienta para poder «anunciarle al mago qué número le tiene que sumar a la primera carta que yo doy vuelta». *Esa*, esencialmente, es la *clave* de este «truco». El resto, es pura magia…

6. PROBLEMAS MÁS DESAFIANTES

www.elsolucionario.org

Más sombreros y otra joya de la lógica[117]

Lo que sigue es un problema de lógica precioso. Es muy sencillo de entender y muy entretenido de pensar. Es divertido y le propongo que le dedique un rato. Más aún: siéntese con algo para escribir y poder ayudarse con los números, pero créame que vale la pena. Le servirá para entrenar su capacidad de hacer *deducciones* lógicas, todas sencillas, pero que hilvanadas resuelven un problema que parece muy difícil, pero que no lo es. Acá va.

Suponga que hay dos personas que tienen un sombrero con un número entre 0 y 19 que *no pueden ver*. Es decir: pueden ver el número de la *otra persona*, pero no el propio. Los voy a llamar A y B. Ambos tienen una lógica implacable y ninguno le saca ventaja al otro.

Por supuesto, el problema —como es esperable— consiste en que cada uno de ellos pueda deducir el número que tiene solamente mirando el del otro. Lo que se sabe, además, es que la *suma* de los dos números que lleva cada uno resulta ser o bien *seis*, o bien *once* o bien 19.

El tiempo empieza a correr. Cada uno mira al otro y va tratando de sacar sus conclusiones. Cada minuto, suena un timbre y en ese momento es donde el que piensa que *dedujo* el número, lo tiene que decir. Si ninguno de los dos dice nada, entonces el reloj sigue corriendo y al pasar un nuevo minuto, si alguno de los dos pudiera ofrecer una solución, la tiene que decir en ese momento.

Y acá es donde llega el elemento curioso: el timbre va sonando una vez por minuto y ninguno de los dos dice nada, hasta que luego del décimo primer sonido del timbre, A dice que número tiene. Y lo explica.

Ahora, le toca a usted. ¿Qué número tenía A? ¿Cómo hizo? ¿Qué cambió con el décimo primer sonido? ¿Por qué pudo A deducir lo que tenía y antes no?

¿Qué pasó?

No creo que haga falta que escriba que no hay trampas ni engaños. Es un ejercicio de *pura lógica*.

Solución

Hagamos algo juntos: pensemos cuáles son todas las posibles combinaciones de números que pueden existir (entre los dos sombreros), sin importar si los tienen A o B.

Los pares que suman 19 son:

> 0-19, 1-18, 2-17, 3-16, 4-15, 5-14, 6-13, 7-12, 8-11, 9-10

Los pares que suman 11 son:

> 0-11, 1-10, 2-9, 3-8, 4-7, 5-6

y los que suman 6 son:

> 0-6, 1-5, 2-4 y 3-3

Éstas son *todas* las posibilidades. No hay otras.

Analicemos los distintos posibles casos.

Si el par que tenían en la cabeza era el 0-19, entonces, quien viera el número 19 en el otro (digamos que A veía a B con el número 19), hubiera sabido inmediatamente que tenía el número 0. Es que si B tenía el 19, como la suma tiene que ser o bien *seis* o bien *once* o bien 19, no puede ser ni 6 ni 11, entonces está forzado a ser 19. Pero si B tiene el 19, eso *obliga* a que A tenga el *cero*. Y listo.

www.elsolucionario.org

Sin embargo, si ese hubiera sido el caso, inmediatamente después de escuchar el primer timbre, A hubiera podido decir que tenía *cero* y no lo dijo. Por lo tanto, *eso descarta la posibilidad de que el par (0-19)* hubiera sido el que tenían A y B.

Con el mismo argumento, uno puede descartar inmediatamente después del primer timbre los siguientes pares —y la/lo invito a que usted deduzca las razones como hice yo recién con el par (0-19)—:

> 1-18, 2-17, 3-16, 4-15, 5-14, 6-13 y 7-12

No puedo incluir el 8-11 ni el 9-10, porque si alguno de los dos ve que el otro tiene el 11, no sabe si él tiene el 0 o el 8, y lo mismo si el otro ve que uno tiene el 8.

Luego, resumiendo, los pares que quedan eliminados después del primer timbre son:

> 0-19, 1-18, 2-17, 3-16, 4-15, 5-14, 6-13 y 7-12

¿Qué hacer ahora? Esperar que suene el segundo timbre. Cuando eso sucede, ¿qué dice sobre el o los pares a eliminar?

Los que quedan como posibles son:

> 8-11, 9-10, 0-11,1-10, 2-9, 3-8, 4-7, 5-6, 0-6, 1-5, 2-4 y 3-3

Si usted se fija, descubrirá que el *único* número que aparece *una sola vez* entre los doce pares es el «7». Todos los demás aparecen repetidos. ¿Y qué dice que estén repetidos? Por ejemplo, tomemos el 4. Digamos que A ve que B tiene el número 4 en su sombrero. A no estaría en condiciones de decidir nada, porque podría ser que tuviera el 7 (porque tendría suma 11) o bien el 2 (y en ese caso tendría suma 6). Por eso es que «ver un 4» no aporta ninguna conclusión.

Sin embargo (y vea usted si está en condiciones de seguir pensando por su cuenta), si A viera que B tiene el 7, entonces SI sabría que él (o ella) tiene el 4. ¿Por qué? Es que evidentemente como B tiene el 7 la suma entre los dos *ya no podrá ser seis.* La única *otra* alternativa es que A tuviera el 12, pero ese caso ya está descartado una vez que se escuchó el primer timbre.

Moraleja, luego del segundo timbre, queda eliminado el par 4-7.

Ahora, es cuestión de detectar entre los posibles pares que quedan, qué número no aparece repetido (fíjese usted primero, antes de seguir leyendo).

Los pares que quedan son:

> 8-11, 9-10, 0-11,1-10, 2-9, 3-8, 5-6, 0-6, 1-5, 2-4 y 3-3

El número que *ahora* no aparece repetido es el 4.

Luego, después del *tercer* timbre, el par eliminado ahora es el (2-4).

Quedan como posibles:

> 8-11, 9-10, 0-11,1-10, 2-9, 3-8, 5-6, 0-6, 1-5 y 3-3

El número que ahora no aparece repetido es el 2.

En consecuencia, luego del *cuarto* timbre, el par eliminado ahora es el (2-9).

Y así sigo con esta sucesión de pares que voy eliminando con el mismo argumento.

Luego del *quinto* timbre, desaparece el par (9-10).

Después del *sexto* timbre, desaparece el par (1-10).

Luego del *séptimo* timbre, desaparece el par (1-5).

Después del *octavo* timbre, desaparece el par (5-6).

www.elsolucionario.org

Luego del *noveno* timbre, desaparece el par (0-6).

Después del *décimo* timbre, desaparece el par (0-11).

Luego del *undécimo* timbre, desaparece el par (8-11).

Veamos qué sucede ahora. ¿Qué pares quedaron como posibles?

> 3-3 y 3-8

El problema, decía, que luego de este timbre A dijo qué número tenía y explicó las razones. ¿Qué cree usted que pasó entonces? Como los dos únicos pares posibles son (3-3) y (3-8), eso significa que A vio que B tenía un 8 y por eso supo inmediatamente que tenía un 3. Y por eso lo dijo. ¿Por qué no pudo decir nada B? Es que B, veía que A tenía un 3, pero no sabía si él/ella, tenía otro 3 o un 8, y por lo tanto, no pudo hablar y hubiera necesitado que sonara el timbre una nueva vez.

Y eso resuelve el problema: A tenía un 3 y B tenía un 8.

Este tipo de situaciones, como es obvio, es muy poco probable que suceda en la vida cotidiana de ninguna persona. Sin embargo, el tipo de razonamientos que involucra es, ciertamente, *no muy complicado.* Lo que *parece* confundir es que uno tiene que *hilvanar* y repetir un argumento varias veces hasta poder llegar a la conclusión final. A eso *sí* que no estamos acostumbrados. Creo que a los humanos nos cuesta trabajo ser *consistentes* y, por lo tanto, tendemos a tratar de llegar a la solución *rápidamente,* sin aceptarnos ser un poco más pacientes y permitirnos, entonces, llegar al final del camino.

Barriles envenenados

En marzo del año 2009, Carlos Sarraute[118] me mandó un mail proponiéndome un par de problemas que había estado pensando con algunos amigos también informáticos y programadores como él. El que quiero comentar acá tiene una particularidad sorprendente: si uno lee el enunciado (y si no tiene más ganas o no tiene más tiempo al menos no se lo pierda) advierte que parece imposible encontrar una solución. Y justamente ése *es* el *gran atractivo:* aparece la *creatividad.* Así como Messi puede inventar en un milisegundo la maniobra desequilibrante e incomprensible, la matemática también. El único problema es que mientras —virtualmente— todo el mundo ha visto un partido de fútbol y conoce las leyes de la física que impiden efectuar ciertos movimientos, no todos estamos expuestos a las mismas condiciones dentro de la matemática (o la ciencia en general). Y entonces *nos privamos de poder disfrutar la belleza intrínseca* de la matemática. Nadie puede valorar *La Gioconda* o la *Quinta Sinfonía* si no está expuesto a ellas. Para poder valorar una obra de arte, hay que tener contra qué comparar. Una vez que uno ha visto suficientes partidos y muchos jugadores, puede valorar lo de Messi. Pero el primer día que uno va a una cancha de fútbol, no logra distinguir lo bueno de lo malo, o lo excelente de lo pedestre. Un país que tiene a Alberto Kornblihtt, Armando Parodi, Gabriel Rabinovich, Eduardo Dubuc, Diego de Mendoza, Hugo Luján, Andrea Gamarnik, Alicia Dickenstein, Juan Pablo Paz o Norma Giarraca, no puede valorarlos sino comprende de antemano por qué sobresale lo que hacen.

Por eso, cuando aparecen problemas como los que me propuso Sarraute, *necesito* compartirlos y comunicarlos.

Si pudiera, la/lo invitaría a que no se pierda la oportunidad de leer el enunciado. No importa lo que haga después. Por supuesto, si no tiene tiempo

www.elsolucionario.org

o no tiene ganas, abandone, pero no se prive de leer primero qué habría que resolver. Acá va.

Hace más de 500 años, un barco está en España a punto de cruzar el Océano Atlántico. Están en los últimos preparativos pero aún faltan *nueve* días para que zarpe. Lleva a bordo *mil* barriles de agua. Una persona llega al barco con una advertencia: uno de los barriles tiene el agua contaminada. Haber juntado el agua llevó mucho tiempo, y no sería posible conseguir algo equivalente para el viaje. La carabela tiene que salir sí o sí en nueve días y el problema consiste en cómo hacer para detectar *cuál de los barriles* es el que tiene el agua impura.

Lo que también se sabe es que si una persona prueba *aunque sea una gota* del agua de ese barril, se enfermará exactamente en una semana. Es decir, si toma agua un jueves, se enfermará el jueves siguiente en algún momento. Como queda dicho, hay sólo nueve días para que zarpe el barco y su partida *no se puede retrasar*. Eso sí: hay *7* personas que están dispuestas a probar el agua de los barriles para determinar exactamente cuál es el que tiene el agua contaminada.

Supongamos que es un miércoles 17 de enero y el barco tiene que salir al viernes 26 del mismo mes (nueve días después, digamos a las cero horas del viernes 26). ¿Se puede diseñar una estrategia para poder *detectar* cuál de todos los barriles hay que excluir del barco?

De eso se trata. Mil barriles. Nueve días. Siete voluntarios. Y usted. Yo le daré la solución, pero si pudiera proponerle algo más, le sugeriría que no lea lo que sigue. Guárdeselo para después. Dedíquele hoy, mañana, pasado, el tiempo que quiera, pero no se robe a usted mismo de esta oportunidad de pensar.

Una idea intermedia

Empiece pensando qué pasaría si hubiera menos barriles y menos personas. Es decir, transforme el problema original en otro que sea *más manejable* que el original y fíjese qué sucede en ese caso.

Solución

Como le propuse, empiezo por reducir el problema y transformarlo en algo más accesible. Supongamos que en lugar de tener mil barriles hubiera nada más que *tres.* Y que en lugar de haber *7* personas, hay nada más que una.

Estamos en un miércoles y hay que decidir qué estrategia va a seguir esta persona. Lo que yo propongo es lo siguiente: tome los tres barriles y póngales una letra (o un número) como etiqueta. Es sólo a los efectos de identificarlos. Digamos que le pone una M, una J y una V. El día miércoles 17 de enero, prueba agua del barril M. El día jueves 18, prueba agua del barril J. Y nada más. Entonces, espera una semana. Si justo al miércoles siguiente, el 24 de enero se enferma, eso significa que el barril que tenía el agua contaminada era el barril M (ya que justo en siete días mostró los síntomas de la intoxicación).

Ahora, supongamos que pasa todo el miércoles 24 y no tiene ningún síntoma. Pero llega el jueves 25 y el voluntario aparece enfermo. Eso indica que el barril J es el que tiene el agua contaminada. Por último, si pasan tanto el miércoles como el jueves y la persona sigue sana, eso implica que el barril que tenía la letra V (el que no probó) es el que estábamos buscando.

Como usted ve, esta estrategia sirvió para tres barriles y con una sola persona. Veamos qué pasaría si en lugar de tres barriles, ahora tuviéramos *nueve barriles* y dos personas para probar.

Éste es el paso crítico para entender. Si usted me sigue con lo que voy a hacer ahora, el resto será muy sencillo.

Sólo para identificar a los personajes, supongamos que los dos voluntarios a probar el agua son Analía y Claudio. ¿En qué cambia que ahora sean dos personas y no una como antes? Es que ahora puedo *combinarlas* para que vayan probando de varios barriles y en los distintos días.

Analía tomará agua de *algunos barriles* el día miércoles y de otros el día jueves. Lo mismo va a suceder con Claudio. Lo que voy a hacer es mostrar cómo asignarle a Analía y Claudio los barriles de los tienen que tomar agua cada día.

Fíjese de qué forma. Antes nombrábamos los barriles con las letras M, J y V (para indicar que tomaban agua el día miércoles, jueves o viernes).

www.elsolucionario.org

Ahora voy a etiquetar a los barriles de la siguiente forma:

> MM, MJ, MV,
>
> JM, JJ, JV,
>
> VM, VJ, VV.

Cuéntelos y verá que son nueve. Como usted advierte, ahora cada barril tiene *dos letras* que lo identifican. La primera letra indica lo que tiene que hacer Analía y en qué día. La segunda, lo que tiene que hacer Claudio y en qué día también.

Por ejemplo, del barril que tiene la etiqueta MJ, Analía tiene que tomar el día miércoles (por la M) y Claudio el día jueves (por la J). De la misma forma, del barril que tiene el nombre JJ, tienen que tomar los dos el día jueves.

Conclusión, ésta es la distribución de lo que tienen que hacer con cada barril:

> MM: Analía y Claudio toman el día miércoles.
>
> MJ: Analía toma el miércoles y Claudio toma el jueves.
>
> MV: Analía toma el miércoles y Claudio no hace nada.
>
> JM: Analía toma el jueves y Claudio el miércoles.
>
> JJ: Analía toma el jueves y Claudio también.
>
> JV: Analía toma el jueves y Claudio no hace nada.
>
> VM: Analía no hace nada y Claudio toma el miércoles.
>
> VJ: Analía no hace nada y Claudio toma el jueves.
>
> VV: De este barril no toma ninguno de los dos.

Como se ve, están cubiertos los *nueve barriles*. «Algo» tiene que pasar. Alguno de los dos (o los dos) tiene que enfermarse (o no)[119], y dependiendo del día cuando eso suceda, dará la clave de cuál es el barril con el problema. Y en el caso en que no se haya enfermado ninguno de los dos, es porque el barril VV es el que tiene el agua contaminada.

Una *idea* más para pensar: si se enferma Claudio el jueves siguiente indica que los *candidatos* a ser barriles contaminados son todos los que tienen una letra J en el segundo término: MJ, JJ y VJ.

La que decide cuál de los tres es Analía. Si ella amaneció enferma el miércoles, entonces era el barril MJ. Si se enfermó el jueves, es el barril JJ y si *no* se enfermó, entonces es el barril VJ.

Por lo tanto, hemos cubierto con *dos personas* los nueve barriles.

Con esta idea, uno puede ir aumentando el número de barriles, pero también hay que incrementar el número de personas.

De acuerdo con lo que vimos recién, con *una* persona podíamos cubrir *tres* barriles. Podemos pensar que $3^1 = 3$.

Si tenemos *dos* personas, podemos cubrir *nueve* barriles, o sea $3^2 = 9$.

Con esta idea, uno puede aumentar el número de personas y, por lo tanto, aumentar el número de barriles. Si tuviéramos *tres* personas, podríamos cubrir 27 barriles, ya que $3^3 = 27$. En ese caso, los 27 barriles tendrían estas etiquetas:

> MMM, MMJ, MMV, MJM, MJJ, MJV, MVM, MVJ, MVV,
>
> JMM, JMJ, JMV, JJM, JJJ, JJV, JVM, JVJ, JVV,
>
> VMM, VMJ, VMV, VJM, VJJ, VJV, VVM, VVJ, VVV.

En este caso, si hubiera tres personas (Analía, Claudio y Rosa), si Analía se enferma el día jueves siguiente, Claudio el miércoles de la otra semana y

www.elsolucionario.org

Rosa no se enferma, entonces el barril es (¿quiere pensar usted?) JMV.

Con cuatro personas, se pueden cubrir $3^4 = 81$ barriles.

Con cinco personas, alcanzan para investigar $3^5 = 243$ barriles.

Con seis personas, se puede verificar lo que sucede en $3^6 = 729$ barriles, y por último, con siete personas, se puede detectar cuál barril tiene el agua contaminada de entre $3^7 = 2.187$.

Como originalmente teníamos 1.000 barriles, con siete personas *sobra* para poder determinar cuál es el barril contaminado.

¿No es bonita esta forma de resolver el problema? Supongo que debe haber otras, pero sin ninguna duda que esta estrategia es efectiva, exhaustiva y creativa[120].

Con la ayuda de la matemática se pudo detectar algo que —en principio— parecía imposible.

Seis bolillas de colores

Martin Gardner[121] es considerado el *padre* de la matemática recreativa. Publicó 65 libros. Sí, leyó bien: ¡65 libros! Vivió casi 96 años (de octubre de 1914 a mayo del 2010). El problema que quiero presentar acá apareció en uno de esos libros (*Mathematical Circus*) en 1979, y él lo tituló: «Las pelotitas de seis colores».

Quiero contar una breve historia sobre este problema. Tiene un planteo ingenuo, muy sencillo de entender. Para encontrar la solución es necesario elaborar una estrategia, algo así como lo que hacen (o tienen que hacer) los ajedrecistas, que imaginan jugadas del rival y van preparando sus potenciales movidas de acuerdo con lo que ellos creen que va a hacer su oponente. La *única* diferencia en este caso es que acá no hay *rival.* Acá hay un problema por resolver. Más aún: uno sabe que el problema *tiene* solución. Se trata de buscar una estrategia para encontrarla. No es sencillo, pero es muy accesible, y si pudiera sugerirle algo es que evite leer la solución tanto como pueda. Fíjese qué interesante: la respuesta está más adelante y me dan ganas de escribirla acá, aun *antes* de escribir el problema, para liberarlo de esa tentación. Pero no es justo que lo haga si de esa forma lo voy a privar del placer de *pensarlo.*

A mí (el problema… y la búsqueda de una solución) me llevó varios días y me resultó entretenidísimo. Yo sabía que, mientras lo pensaba en la ducha, en un ascensor, manejando o aun sentado frente a mi computadora (por poner algunos ejemplos), estaba frente a un ejercicio fascinante y que promovía mi imaginación: ¿qué más se le puede pedir a un ejercicio para entrenar/entretener la mente?

Antes de contarle de qué se trata, permítame sugerirle: *no lo abandone antes de haber intentado un rato. Muy posiblemente necesite de varios intentos y*

www.elsolucionario.org

aceptar la frustración de que no le salga inmediatamente. Pero dese a usted misma/mismo la oportunidad de disfrutar el trayecto en búsqueda de la solución. Encontrarla o no termina siendo irrelevante.

Acá va. Estos son los datos que uno necesita tener. Hay seis bolillas de tres colores diferentes: dos amarillas, dos rojas y dos verdes. La particularidad es que de las dos bolitas de cada color hay una que pesa un kilo y la otra dos, pero no sabe cuál es cuál (justamente en eso consistirá el problema)[122].

Sin embargo, para poder decidir el peso de cada una se tiene una balanza con dos platillos. Si uno pone objetos para pesar de cada lado, el fiel de la balanza se inclinará hacia el lado del platillo que sostenga los de mayor peso. Sin embargo, la balanza *no* indica cuánto más pesado es lo que está de un lado que del otro. En el caso de que los pesos de los dos lados sean iguales, los dos platillos permanecerán a la misma altura.

Por supuesto, hay una manera inmediata de determinar cuál es la bolilla más pesada de cada color usando tres pesadas. Basta con poner cada una de las bolillas rojas en cada platillo en la primera pesada y determinar cuál es la que pesa más. Después, uno hace lo mismo con las amarillas en la segunda pesada y por último con las dos verdes. De esa forma, con tres pesadas uno puede distinguir cuál es la más pesada de cada color.

Ahora sí, ésta es la pregunta para pensar: ¿se podrá decidir cuál bolilla es la más pesada de cada color usando *nada más que dos pesadas?* Con tres pesadas es fácil, pero ¿se podrá con dos?

Respuesta

Le propongo que hagamos un viaje en conjunto. Estoy seguro de que la forma en la que a mí se me ocurrió solucionar el problema no es la única, de manera tal que si usted encontró otra y no la puede confrontar con la que voy a escribir yo, no crea que es equivocada. Revísela con otras personas hasta convencerse de que lo que pensó está bien también.

Dicho esto, siempre genera una dificultad extra tener que *seguir la línea de pensamiento* de otra persona, pero no me queda otro remedio. Acá va.

Quiero convencerla/lo que *dos bolillas pesadas son suficientes* para descubrir cuánto pesa cada bolilla de cada color. Le recuerdo que de las dos amarillas hay una que pesa más (2 kilos) que la otra (que pesa 1 kilo) y lo mismo para las verdes y las rojas. Se trata de poder determinar cuál es cuál.

Primera pesada

Voy a llamar A1 y A2 a los dos bolitas amarillas, R1 y R2 a las dos rojas y V1 y V2 a las dos verdes.

Para ponernos de acuerdo, voy a poner entre paréntesis las bolitas que ubico de un lado y del otro en cada platillo. Por ejemplo, en la primera pesada voy a poner las bolillas (A1, V1) en un platillo y (R1, V2) en el otro. Como se ve, elegí las dos verdes pero las puse en platillos distintos, y luego una de las amarillas y una de las rojas.

Por supuesto, hay tres posibles alternativas:

a) (A1, V1) = (R1, V2) (en donde uso el signo «=» para indicar que pesan lo mismo)
b) (A1, V1) > (R1, V2) (en donde uso el signo «>» para indicar que el platillo de la izquierda pesa «más» que el de la derecha, pero otra vez, no se sabe «cuánto más»)
c) (A1, V1) < (R1, V2) (en donde uso el signo «<» para indicar que el platillo de la izquierda pesa «menos» que el de la derecha, pero no se sabe cuánto menos)

Analicemos juntos cada posibilidad.

Caso a):

Situémonos en la situación en donde (A1, V1) = (R1, V2). Como sabemos que V1 y V2 pesan distinto y están en distintos platillos, eso significa que:

> A1 = V2,
>
> y (*)

www.elsolucionario.org

> R1 = V1.

¿Por qué? Porque como las bolillas verdes pesan distinto y están en platillos opuestos, si en la *suma* de cada lado los pesos quedan igualados, eso quiere decir que las bolillas amarilla y roja tienen que pesar igual a cada una de las verdes que está del otro lado.

Segunda pesada

Ahora, como *segunda pesada* ponemos las otras dos bolillas amarilla y roja que quedan. Es decir, pesamos (A2) por un lado y (R2) por el otro.

De esa forma, vamos a descubrir si A2 pesa más que R2 o al revés.

Si A2 > R2, entonces ya sabemos que A2 = 2 y R2 = 1 y, por lo tanto, A1 = 1 y R1 = 2, y mirando (*) descubrimos que V2 = A1 = 1 y V1 = R1 = 2.

Si R2 > A2, entonces se deduce que R2 = 2 y A2 = 1 y, por lo tanto, R1 = 1 y A1 = 2. Una vez más, usamos las igualdades de (*) y se deduce:

> “
> V2 = A1 = 2 y V1 = R1 = 1

Eso completa este caso. Con dos pesadas, hemos descubierto *cuánto pesa cada bolilla.*

Caso b):

Supongamos ahora que estamos en el caso (A1, V1) > (R1, V2).

Le propongo pensar lo siguiente: la bolilla V1 tiene que ser la que pesa 2 kilos. ¿Por qué?, (¿quiere pensarlo usted?). Porque como sabemos que V1 y V2 pesan distinto, si V1 *no pesara 2 kilos*, entonces V2 debería pesar 2 kilos. Pero en ese caso, el platillo de la izquierda *a lo sumo* puede pesar 3 kilos (porque ya V1 pesaría 1 kilo, con lo cual a A1 no le quedaría más remedio que pesar 2 kilos). Pero como R1 no puede pesar *menos* que 1 kilo, entonces el platillo de la derecha *también* pesaría 3 kilos, por lo que los pesos de ambos lados serían iguales y esto contradice la hipótesis inicial que dice que el

platillo de la izquierda (A1, V1) pesa *más* que el platillo de la derecha (R1, V2).

Entonces, *concluimos* que:

> V1 > V2 (**)

Dicho esto, todo lo que queda por hacer ahora es distinguir los pesos de las bolillas amarillas y rojas, porque las verdes ya quedaron diferenciadas.

Entonces *tomemos* las bolillas A1 y R1 que participaron en la primera pesada y pongámoslas en el platillo de la izquierda, y en el platillo de la derecha, ponemos las *otras dos bolillas* de los mismos colores (amarillo y rojo) que hasta acá no habíamos utilizado.

O sea, pesamos

> (A1, R1) y (A2, R2).

¿Qué podría pasar? Podrían darse tres escenarios:

1) (A1, R1) = (A2, R2),
2) (A1, R1) > (A2, R2)… o bien,
3) (A1, R1) < (A2, R2).

Caso 1):

Cada lado pesa 3 kilos (no puede haber igualdad ni en 4 kilos, porque sólo hay tres bolillas que pesan 2 kilos, y tampoco puede haber igualdad en 2 kilos, porque hay sólo tres bolillas que pesan 1 kilo).

Luego, como las bolillas rojas pesan distinto, entonces se deduce que:

> A1 = R2 y A2 = R1 (***)

Como estamos en el caso (b), en donde:

www.elsolucionario.org

> (A1, V1) > (R1, V2),

y ya sabemos que

> V1 = 2, y V2 = 1,

entonces, podemos afirmar que:

> A1 = 2 y R1 = 1 (****)

Es que si no fuera así, entonces

> A1 = 1,

y por (***),

> R2 = 1

Y estas dos igualdades, implicarían que A2 = 2 y R1 = 2.

Pero esto no puede suceder, porque forzaría a que:

> (A1, V1) = 3

Y, por otro lado, tendríamos que

> (R1, V2) = 3,

con lo que se contradiría la hipótesis inicial de que (A1, V1) > (R1, V2).

En consecuencia, por (****) se tiene que A2 = 1 y R2 = 2 y listo.

Caso 2):

La situación es (A1, R1) > (A2, R2).

En este caso, *forzosamente* A1 > A2 y R1 > R2.

Es que a la izquierda *tiene* que haber alguna bolilla de dos kilos (si no, el peso no podría ser *mayor* que el de la derecha) y como no pueden *igualar* en 3 kilos, las dos bolillas de la izquierda pesan dos kilos y, por lo tanto, las dos de la derecha pesan 1.

Conclusión:

> A1 = 2, A2 = 1, R1 = 2, R2 = 1 y, además, ya sabíamos que V1 > V2

Caso 3):

La situación ahora es (A1, R1) < (A2, R2).

Igual que en el caso (2), pero invirtiendo los pesos, se deduce que *forzosamente:*

> A1 < A2 y R1 < R2

Los argumentos son los mismos que escribí en caso (2).

Por último, faltaría analizar el ***caso c)***, pero se trata de *repetir* los mismos argumentos que utilicé para el caso b), pero adaptados a la nueva situación**[123]**.

Moraleja

www.elsolucionario.org

Con sólo dos pesadas es posible determinar el peso de cada bolilla. El análisis *parece* complejo, porque hace falta analizar todos los escenarios posibles, pero una vez que uno advierte el camino por el que debe ir, el resto es cuestión de paciencia.

Espero que usted lo haya disfrutado tanto como yo.

Agradecimientos

A mi querido Claudio Martínez, por la generosidad con la que me trata en cada episodio de la vida cotidiana, por menor que sea. Un amigo entrañable y un profesional insuperable. Y encima de todo, siempre con una sonrisa. Gracias a Claudio yo estoy en condiciones de hacer todo lo que hago: una usina generadora de ideas y una capacidad admirable para estimularme en todos los proyectos que soñamos en común.

A Woody González, Ariel Hassan y María Marta García Scarano, porque trabajar con ellos me obliga a redefinir la palabra «trabajo». Son un lujo como profesionales y como amigos, y mi vida es ciertamente mejor por la cantidad de horas que compartimos en viajes y horas de grabación.

A quienes «betatestearon» el libro. Es decir, a aquellos que le dedicaron un par de meses a revisar los problemas, a tratar de resolverlos, a corregir los errores, a buscar soluciones más sencillas. A quienes me ofrecieron en forma desinteresada lo más valioso que tienen: su tiempo. Y lo hicieron para mejorar la calidad de los textos. Entonces, vaya acá expresada mi gratitud para Carlos D'Andrea, Juan Sabia, Alicia Dickenstein, Manu Ginóbili, Santiago Bilinkis, Gerry Garbulsky, y Claudio Martínez. Se los dije personalmente pero lo quiero dejar registrado en forma más enfática: ¡gracias! He guardado todas las notas que me enviaron. Algún día debería publicarlas: creo que serían más interesantes que el propio libro.

Como escribí en otras oportunidades, a todos los que me iniciaron y me enseñaron a disfrutar de y con la matemática: Enzo Gentile, Luis Santaló, Miguel Herrera (muy especialmente) y Ángel Larotonda, pero también a aquellos con los que recorrimos partes del camino: Eduardo Dubuc, Carmen Sessa, Néstor Búcari, Ricardo Noriega, Oscar Bruno, Baldomero Rubio

www.elsolucionario.org

Segovia, Leandro Caniglia, Pablo Calderón, Ricardo Durán, Fernando Cukierman, Juan Sabia y Carlos D'Andrea.

A un pequeño grupo de personas que con su estímulo y coraje me estimulan en todas las actividades que emprendo: Ernesto Tiffenberg, Tristán Bauer, Verónica Fiorito, Lino Barañao y Martín Bonavetti.

Mi reconocimiento eterno a dos personas que «vieron el futuro» y me conminaron a que emprendiera este camino de difusión de la matemática: Carlos Díaz y Diego Golombek. Ellos creyeron en mí, mucho antes de que yo me hubiera dado cuenta de que tenía algo para decir. Y junto a ellos, a Violeta Collado, Laura Campagna y Héctor Benedetti de Siglo XXI Editores.

A mi queridísimo Miguel Rep, por los dibujos de las tapas. Genial, como siempre.

A Pablo Avelluto, porque una vez que publicamos juntos el primer libro, apostó por más, quiere más, y me abriga con su afecto y respeto profesional cada vez que nos encontramos y/o hablamos. Saber que jugamos en el mismo equipo es un plus particular.

A mi estimado Willie Schavelzon, quien vela por mis intereses económicos y se dedica a liberarme de toda preocupación comercial para que me dedique exclusivamente a lo que me interesa y me gusta: producir más historias y generar más contenidos para los libros y programas de televisión.

A Glenda Vieites, la editora este libro (igual que el anterior): es un gusto trabajar con una sonrisa que camina. Glenda vibra en una longitud de onda que hace que todo se haga más fácil. O en todo caso, todo se me haga *más fácil. Y tiene una capacidad de trabajo y eficacia inigualable.*

A mis compañeros de El Oso Producciones, de La Brújula, del Canal Encuentro, del Canal 7, del Canal Tecnópolis y de Página/12. *No puedo en un par de renglones hacer justicia con lo que siento que hacen por mí, pero sepan que no me pasa inadvertido el afecto y el calor con el que me tratan* en cada oportunidad *que nos cruzamos en cualquier pasillo, estudio de televisión o redacción.*

A mis compañeros y colegas de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la UBA, lugar en el que me formé y pasé los mejores años de mi vida. Y a

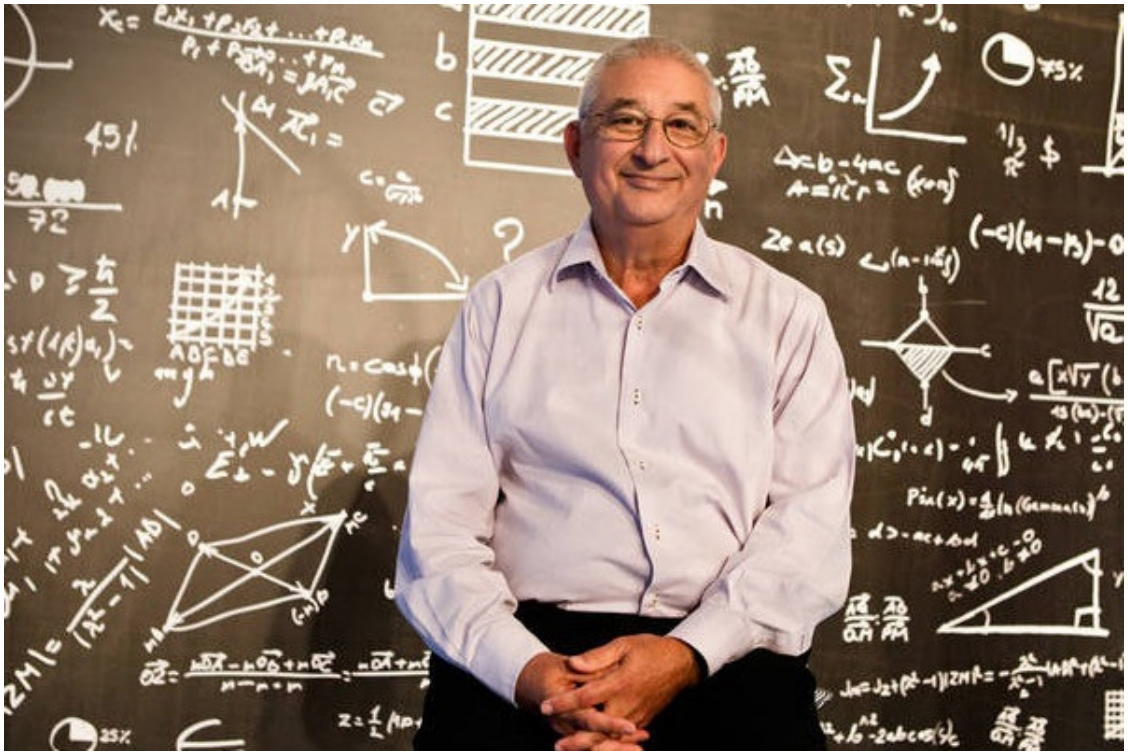
los miles *de alumnos (sí, miles) que tuve en diferentes momentos y en diferentes materias, pero que me marcaron para siempre. A todos y cada uno de ellos, mi gratitud infinita.*

A todos mis compañeros de la Editorial Sudamericana, que empujaron con una pasión emocionante el lanzamiento del último episodio, ¿Cómo, esto *también* es matemática? *No crean que me pasó inadvertido, y me estoy refiriendo a Daniela Morel, Florencia Trimarco, Verónica Larrea, Sara D'Angelo, Catalina Lucas y Mariana Creo. Sé que ustedes disfrutaron tanto como yo todo lo que pasó con el libro anterior y el profesionalismo con el que se preparan para éste.*

Y un agradecimiento especial para Cristina Fernández de Kirchner, quien decidió aceptar la invitación y participar de la presentación del libro anterior, sentando un precedente inédito: es la primera vez en la historia que un presidente en ejercicio de sus funciones se involucra en forma personal en el lanzamiento de un libro de difusión de la ciencia, y muy especialmente de la matemática. Su compromiso con la educación, el metamensaje que le envió a la sociedad toda, tendrá el reconocimiento que merece cuando las cuestiones coyunturales permitan distinguir lo efímero de lo permanente. Por supuesto que tengo y tendré siempre una deuda de gratitud con ella, pero me gustaría dejar escrito que aún me maravilla pensar que el presidente de un país (el mío, la Argentina) vino con su vicepresidente electo, y más de la mitad de su gabinete, al ¡lanzamiento de un libro de matemática! ¿No es notable esto?

Y por último, como en las seis oportunidades anteriores, a las cuatro personas que son mis guías éticos: Marcelo Bielsa, Alberto Kornblihtt, Víctor Hugo Morales y Horacio Verbitsky.

www.elsolucionario.org



ADRIÁN PAENZA (Buenos Aires, Argentina, 1949). Es doctor en Matemáticas por la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires, además de uno de los periodistas deportivos más importantes de su país. Ha trabajado en los diarios *Clarín*, *La Nación* y *Página/12*. Es autor de la exitosa serie *Matemática… ¿estás ahí?*, que desde el año 2005 ha vendido más de un millón de ejemplares en Argentina.

En 2014 ganó el Premio Leelavati al mejor divulgador de matemáticas del mundo.

Notas

www.elsolucionario.org

[1] Richard W. Hamming (7 de marzo de 1986), como parte de una charla que dio en los laboratorios Bell en Nueva Jersey, EE. UU. <<

[2] Si bien en todos los casos los dólares a los que me refiero son canadienses, son casi equiparables con los dólares más populares, los estadounidenses. <<

www.elsolucionario.org

[3] El informe de marzo del año 2007 del Ombudsman de la provincia de Ontario, en Canadá, André Marin, se puede encontrar en el sitio web: http://www.ombudsman.on.ca/Ombudsman/files/46/46b07c62-9f83-4ef3-90a4-ab7f25726941.pdf. <<

[4] La posición *inicial* del cubo es cuando cada cara es del mismo color. O sea, que los *nueve cuadraditos* que componen cada cara exterior son de la misma tonalidad. <<

www.elsolucionario.org

[5] Estas permutaciones están contadas por el número 8! (el factorial del número 8) = 40.320. <<

[6] Por *orientados* entiendo que pueden ser ubicados libremente sin que la posición de unos afecte a los otros. <<

www.elsolucionario.org

[7] Esto resulta de dividir el factorial del número 12 por 2, o sea 12! / 2 = 239.500.800, ya que además una permutación impar de las equinas genera una permutación impar de las aristas también. Hay once aristas que se pueden intercambiar en forma independientemente, pero la duodécima depende de los movimientos de las otras once y, por lo tanto, se tienen 211 = 2.048 posiciones posibles. <<

[8] En realidad, debería decir «cualquier posición *posible de acceder* desde la posición original». El libro *The Complete Cube Book* (*El libro completo del Cubo* es mi traducción libre), escrito por Roger Schlafly, demuestra que *no toda disposición que uno pueda diseñar en el cubo sea «alcanzable»* desde la posición inicial. Como usted advierte, si uno se inventara una posición a la que no se puede llegar desde la original, mal podría intentar *volver* hacia atrás. <<

www.elsolucionario.org

[9] Aquí vale la misma observación que para el punto anterior. <<

[10] Para aquellos a quienes les interese avanzar en la historia, ingeniería y algoritmos que involucran al *Rubik's Cube*, les sugiero que utilicen cualquier «buscador» en Internet y basta con escribir «Rubik's Cube» para recibir una lista de más de *diez millones* de páginas dedicadas a él. Si tiene tiempo y tanta curiosidad al respecto, le sugiero que lo haga. <<

www.elsolucionario.org

[11] Se llama *reloj atómico* a un dispositivo que sincroniza una oscilación eléctrica con la oscilación de la radiación emitida en la transición entre los dos niveles hiperfinos de un átomo de cesio 133. Justamente, la precisión se origina en que la radiación emitida por estos átomos es siempre la misma y por eso puede usarse para definir un segundo patrón para medir el tiempo. Desde el año 1967, el Sistema Internacional de Unidades adoptó oficialmente como un segundo a la duración de 9.192.631.770 períodos de la radiación emitida por el Cesio 133. <<

[12] El detalle completo de cómo funcionan el GPS y los relojes atómicos se puede encontrar en un artículo escrito por el físico Daniel Kleppner, del Research Laboratory of Electronics at MIT (Laboratorio de Investigaciones en Electrónica del MIT, Instituto de Tecnología de Massachusetts) en la revista *Science* del 28 de marzo de 2008, Vol. 319, N.º 5871, págs. 1768-1769. <<

www.elsolucionario.org

[13] La velocidad del sonido es aproximadamente de 1.230 kilómetros por hora, o bien —según la temperatura y de la altura con respecto al nivel del mar— de 340 metros por segundo. Es decir, el sonido recorre 340 metros cada segundo. <<

[14] Los satélites emiten ondas electromagnéticas, que no son sonoras por cierto. Estas ondas viajan a la velocidad de la luz, que es de 300.000 kilómetros ¡por segundo! El ejemplo de las iglesias y el tañido de las campanas es sólo una licencia que me permite presentar el problema. <<

www.elsolucionario.org

[15] Sucede que al ser la velocidad de la luz de 300 mil kilómetros por segundo, si hay una milésima de segundo entre la emisión de la señal y la recepción, eso significa que esa señal viajó 300 kilómetros. Aunque parezca increíble, en un nanosegundo, la luz viaja ¡30 centímetros! <<

[16] En realidad, como usted advierte, el cuarto satélite se utiliza como «corrector» y pareciera como que invalida la necesidad de tener cuatro satélites por el hecho de vivir en un mundo tridimensional. Sin embargo, en esencia, el GPS nos provee de la latitud y la longitud, como si viviéramos en un mundo plano, a pesar de que el sistema podría proveer la «altura» también, si fuera necesario. <<

www.elsolucionario.org

[17] Y podría incluir acá el caso tristemente célebre de Cromañón generado por un individuo que lanzó una bengala, cosa que ya había sucedido varias veces en estadios de fútbol. O también el caso vivido en la cancha de River en el año 1968, en donde murieron 74 personas y hubo más de 150 heridos que, por no tener información sobre el estado de las puertas, terminaron aplastando a los que iban adelante. <<

[18] Branislav Ulicny y Daniel Thalmann del Laboratorio de Computación Gráfica del Instituto de Tecnología Federal de Suiza, ubicado en Lausanna, escribieron varios artículos al respecto. <<

www.elsolucionario.org

[19] Yo no vi ninguna de la famosa trilogía, pero consulté con quienes sí las vieron y son fanáticos. Ellos corroboraron el tema de los «orcos». <<

[20] CGI = Computer-Generated Imagery (imágenes generadas por una computadora). <<

www.elsolucionario.org

[21] Massive Software es una compañía ubicada en Auckland, Nueva Zelanda. <<

[22] «Simulating dynamical features of escape panic», *Nature*, Vol. 407, 28 septiembre del año 2000. <<

www.elsolucionario.org

[23] Se llama «La Falacia del Fiscal» o *«Prosecutor's Fallacy»* (en inglés) por las acusaciones y condenas de individuos reportadas en los últimos 50 años, en donde las pruebas incriminatorias parecían contundentes hasta que la aparición de matemáticos especializados en probabilidades y estadística terminaron por exhibir los errores cometidos. Gente inocente pagó con años de cárcel y personas acusadas de homicidios (múltiples en algunos casos) murieron sin haber tenido responsabilidad alguna. De la misma forma, y en sentido inverso, el sonado caso de O. J. Simpson en 1994 mostró cómo la distorsión de los datos y su manipulación para encontrar alguna forma de absolverlo terminaron por declarar inocente a quien todo indica que fue el autor material del crimen del que se lo acusaba. <<

[24] El autor de la idea es Charles Seife, reconocido profesor y periodista científico norteamericano, quien contribuye periódicamente en las revistas *Scientific American, The Economist, Science* y *New Scientist*, entre otras. Para él, entonces, el crédito que le corresponde. <<

www.elsolucionario.org

[25] David Krumholtz en la vida real. La serie fue creada por el matrimonio Cheryl Heuton y Nicolas Falacci, y producida por los hermanos Ridley y Tony Scott. <<

[26] Extraído del libro *Numbers Behind the Numb3rs* (*Números detrás de los Núm3ros*), publicado en el año 2007 por la Editorial Plume, y cuyos autores son Kevin Devlin (uno de los gurúes de la divulgación de la matemática en el mundo) y Gary Lorden, profesor en Cal-Tech en Pasadena, California, quien fue el jefe de los consultores sobre temas matemáticos que tuvo la serie. <<

www.elsolucionario.org

[27] Es que el señor dice en total «amarillo» 27 veces, pero de esas 27 solamente 12 son correctas. Por eso, la probabilidad de que sea amarillo se calcula dividiendo esos dos números: 12 / 27 = (aprox.) 0,44444… O sea, las posibilidades de que sea amarillo superan el 44,44%. <<

[28] O sea, el 56% restante. <<

www.elsolucionario.org

[29] En realidad, no es el 50% porque las ruletas tienen o bien un número cero (que no tiene color) o algunas veces tienen además del cero un «doble cero», que tampoco tiene color. O sea, en principio, de los 37 números que figuran en el tambor, hay 18 colorados y 18 negros. El único (que suele ser de «color verde») es el cero. Por eso, la probabilidad de que salga colorado (o negro) es 18 / 37 = (aprox.) 0,4864, es decir, un poco más del 48,64%. Si, además, hubiera doble cero, la probabilidad de que salga un colorado (o negro) es de 18 / 38 = 0,4736 (aprox.), lo que significa que un poco más de un 47,36% <<

[30] Otros ejemplos equivalentes:

a) El número 7 (colorado) apareció seis veces seguidas en el Caesars Palace, en Las Vegas, en la mesa 211, el 14 de julio del año 2000.

b) En la ciudad de Bloomington, unos 200 kilómetros al sur de Chicago, el número 5 se repitió cinco veces consecutivas. William Nelson Darnborough, nativo del lugar, hizo saltar la banca apostando virtualmente todo lo que fue ganando en cada jugada.

<<

www.elsolucionario.org

[31] Sería interesante (aunque escapa al objetivo de este libro) hablar de la diferencia entre *error absoluto* y *error relativo* que aparece en las mediciones físicas. Uno podría desviarse en miles de kilómetros midiendo la distancia entre estrellas, pero el error *relativo* podría ser muy pequeño. <<

[32] En latín, un día determinado, por ejemplo el 24 de febrero, se decía: *Ante diem sextum kalendas martias*. Esto se entendería en castellano como: «Día sexto antes del primero de marzo». Algo así como «faltan seis días para el primero de marzo». Pero como los romanos no tenían 29 de febrero, pero sí tenían dos días 24 de febrero, que sería el 24 «bis», cada cuatro años aparecía este día, y el sacerdote encargado de anunciarlo decía: *Ante diem bis sextum kalendas martias*, o lo que es lo mismo (casi): «Hoy es el día bis sexto antes del primero de marzo». Y de esa frase, surge la palabra «bisiesto», por *bis sextum* (fuente: etimologias.dechile.net). <<

www.elsolucionario.org

[33] Si uno considerara algunos decimales más, descubriría que cada 4.000 años (el primero sería el año 4.000, después el 8.000, etc.) esos años ¡tampoco serían bisiestos! Es decir, a pesar de que 4.000 es múltiplo de 400, ése sería el primero en el que, *debiendo tener un 29 de febrero*, no lo va a tener. Sin embargo, a esa altura, ¿a quién le va a importar? <<

[34] Se correrían ocho días cada mil años. <<

www.elsolucionario.org

[35] Cuando Carlos D’Andrea estaba revisando el texto, me envió un mensaje con esta observación que quiero compartir: «No conocía este problema, me parece MUY interesante la presentación. Ahora, yo sacaría el “no pino” y pondría algo así como que sólo hay pinos y abetos. Eso de “no pino” es muy de matemáticos…». Confieso que cuando lo leí estallé en una carcajada. No cambié en el texto el NP (no pino), pero si a usted le resulta más cómodo o familiar, use la idea de Carlos y piense en abetos, por ejemplo. <<

[36] La esencia de este problema fue ideada por dos matemáticos: Sergio Yuhjtman y Cristian Czubara. Sin ellos, este artículo no hubiera existido. Todo el crédito les corresponde a ellos. <<

www.elsolucionario.org

[37] No hay en castellano una palabra que signifique «*doomsday*», sin embargo, la expresión más aceptada es «el día del juicio final». John Conway dice haberse inspirado en un artículo que escribió Lewis Carroll, el célebre autor de *Alicia en el País de las Maravillas*. Carroll fue el seudónimo que usó durante su vida el matemático y poeta inglés Charles Lutwidge Dodgson. <<

[38] Para aquellos interesados en investigar un poco más la fórmula que describió Conway, el artículo original lleva el nombre «Doomsday Algorithm» y figura en las páginas 795-797 del libro *Winning Ways for Your Mathematical Plays* (Vol. 2, 1982). <<

www.elsolucionario.org

[39] Depende del momento en el que usted esté leyendo este párrafo, antes o después del 31 de diciembre de 2012. Y si lo está leyendo justo el último día del año 2012, estoy seguro de que no tiene que preguntarse qué día de la semana cae… ¿o sí? <<

[40] La fórmula requiere un poco de sintonía *fina* y ajustes cada 400 años, pero a los efectos prácticos creo que la idea se entiende. <<

www.elsolucionario.org

[41] Si uno hiciera una lista *numerada* con todos los días de un año, y se fijara en los números que le corresponden al 28 o 29 de febrero, 4/4, 6/6, 8/8, 10/10, 12/12, 5/9, 9/5, 7/11 y 11/7, descubriría que *las diferencias* entre cualquier par de esos números es un múltiplo de 7. Y eso es todo lo que uno necesita saber para poder asegurar que caen en el mismo día de la semana. Un poco más complicado es detectar el día clave de cada siglo o el de cada año, pero el argumento de Conway es fácil de seguir con un poco de aritmética modular. <<

[42] Con la misma idea, si en lugar de diez dígitos uno solamente tuviera cuatro, entonces habría 4! = 4 x 3 x 2 x 1 = 24 posibilidades sin repetición y 4^4 = 256 si se pudiera repetir, o sea, diez veces más. ¿Y si uno contara con un número de dígitos muy grande? ¿Qué pasaría? Si llamamos *a* al número de dígitos disponibles, entonces habría *a* x (*a-1*) x (*a-2*) x (*a-3*) posibilidades sin repetir y a^4, si se permitiera usar el mismo número varias veces, pero en el *infinito*, o sea, cuando *a* se hace cada vez mayor, como el cociente *tiende a uno*, estos números son indistinguibles y, por lo tanto, no habría diferencia entre uno y otro. <<

www.elsolucionario.org

[43] Se entiende que *no contestar* o *contestar incorrectamente* descuenta puntos también. <<

[44] Originalmente había puesto como título a esta historia la palabra *password.* Alicia Dickenstein me sugirió que la cambiara por algo más latino, más nuestro. Por eso ahora se llama «*Contraseña*». Tenía razón. <<

www.elsolucionario.org

[45] Es una versión mía, con ligeros retoques, pero la esencia es lo que figura en el artículo de *Le Monde* del 30 de septiembre de 2010. <<

[46] Por ejemplo, el número 378 es múltiplo de 3, porque la suma de sus dígitos (3 + 7 + 8 = 18) es múltiplo de 3. Por otro lado, el número 4729 no es múltiplo de 3 porque 4 + 7 + 2 + 9 = 22 no es múltiplo de 3. Como se ve, es una regla muy sencilla y muy útil. La/lo invito a que piense cómo se deduce esta regla. Una vez que lo haga, ¡no se la olvida nunca más! <<

www.elsolucionario.org

[47] Se entiende que el segundo ganaría, siempre y cuando él/ella jueguen «correctamente». <<

[48] Salvo que la torre ya esté ubicada o bien en la última columna (extrema derecha) o bien en la primera fila (fila superior). <<

www.elsolucionario.org

[49] Es decir, en este caso, no hay nada para minimizar, porque o bien uno gana o pierde. Pero cuando uno está en una situación en la que *detecta* que el rival conoce la estrategia adecuada para *ganar siempre*, y tiene posibilidades de *minimizar* su pérdida, aunque sea evitando perder el tiempo en el juego, conviene hacerlo. <<

[50] De hecho, muchas cosas en matemática se demuestran o se razonan «por descarte»… <<

www.elsolucionario.org

[51] El problema está propuesto como un ejercicio en el libro *The Art and Craft of Problem Solving*, de Paul Zeitz. <<

[52] En realidad, el número *nueve* de comensales es totalmente irrelevante. El resultado es cierto para cualquier número de personas. <<

www.elsolucionario.org

[53] Siempre de manera tal que quede un plato delante de alguno de los comensales. <<

[54] Una generalización que me propuso Carlos D'Andrea: si el número *n* de personas sentadas a la mesa circular es un número *par*, entonces es imposible que exista una distribución tal que, al hacer rotar la mesa, «le caiga» un plato por persona a la vez. Por ejemplo: si el número de personas fuera dos (o sea si $n = 2$), entonces las dos posibilidades son o ningún plato puesto correctamente o los dos puestos correctamente. En ninguno de los dos casos se cumple que haya una distribución que haga «un plato correcto por persona por rotación». Para el caso $n = 4$, las posibles posiciones iniciales (suponiendo que hay un solo plato correcto en la posición inicial), que será para nosotros el plato número (1), son las siguientes: 1-3-4-2, o bien, 1-4-2-3. Si uno hace rotar estas posiciones iniciales, verá que no se puede conseguir que haya un solo plato correcto por persona por rotación (en el primer caso), la segunda rotación «fija» los platos 3 y 4, y en el segundo caso la tercera rotación fija los platos (2) y (3). Por último, para el caso $n = 9$, hay una configuración que fija un plato por rotación (incluyendo la inicial). Es 1-9-6-5-7-3-2-4-8. Compruébelo usted. <<

www.elsolucionario.org

[55] Juan Sabia es doctor en Matemática, profesor en la UBA y, además, es escritor de cuentos infantiles. Es uno de mis amigos más cercanos, uno de los que tiene la paciencia infinita de leer *todos* los textos que se publican con mi nombre, y no sólo me aporta soluciones mucho más bonitas, intuitivas y creativas que las que yo puedo proponer, sino que también me ofrece problemas para incorporar en los libros. <<

[56] Otra forma de pensarlo: como al principio de la sucesión M(1,50) es *menor* que 25, si se mantuviera *siempre* menor que 25 a medida que voy recorriendo la sucesión, en algún momento debería dar un salto de un número menor que 25 a otro mayor que 25 al llegar al final, ya que M(51,100) es mayor que 25. Pero eso no puede pasar porque la variación entre dos números consecutivos es *uno*. <<

www.elsolucionario.org

[57] Si este problema le interesó y quiere avanzar un poco más, le propongo una generalización que me sugirió Juan Sabia. Suponga que los 100 niños están ubicados en una ronda (y no en una hilera como dice el problema original). En este caso, se puede probar lo siguiente: para cualquier número *n* entre 1 y 50, hay *2 n* niños consecutivos, de los cuales *n* son varones y *n* son mujeres. Este resultado ya no es cierto si estuvieran dispuestos en una hilera. <<

[58] Cuando digo cualquiera, me refiero a un número *finito* de puntos. <<

www.elsolucionario.org

[59] En realidad, podría haber varios triángulos que tengan área mínima. En ese caso, me quedo con cualquiera de ellos. <<

[60] Si los puntos están sobre una misma recta entonces sí es posible distribuirlos de manera tal que entre dos círculos haya una cruz y entre dos cruces haya un círculo. Basta con que se vayan alternando círculos y cruces. Lo que la argumentación demuestra es que ésta es la *única* solución posible al problema. <<

www.elsolucionario.org

[61] Se usa la palabra «absurdo» para indicar que si uno supone que un «cierto» hecho *no* es cierto, eso conduce a un «absurdo». Por lo tanto, lo que uno *quiere* probar *tiene* que ser cierto. <<

[62] Por ejemplo, si el conjunto fueran todos los números reales *mayores que cero*, este conjunto *no tiene un número que sea* ***el menor*** *de todos*. Es que el «candidato» a ser el menor de todos es el cero, pero *estamos suponiendo que* el cero *no está dentro del conjunto original*. O sea, las propiedades que valen para finitos números no son necesariamente ciertas para conjuntos infinitos. <<

www.elsolucionario.org

[63] Centro Cultural de la Cooperación, en la avenida Corrientes y Montevideo, en la Capital Federal de la República Argentina. <<

[64] Claudio Martínez (productor ejecutivo), Woody González y Ariel Hassan (directores y realizadores del proyecto), María Marta García Scarano (productora general), Pablo Coll, Pablo Milrud, Ariel Arbiser, Matías Graña, Gerry Garbulsky, Laura Dóbalo, Laura Pezzatti, León Braunstein y Cristian Czúbara (integrantes de los distintos equipos que aportaron los contenidos específicos). <<

www.elsolucionario.org

[65] Salvo que viva en Inglaterra o en Japón, por ejemplo, en donde los carriles están invertidos respecto de la forma de conducir en toda América y en el resto de Europa. <<

[66] Por supuesto, estoy suponiendo que los mozos intentan *siempre* entregar la menor cantidad de billetes posibles, lo cual no es *necesariamente* cierto. De hecho, si esperaran que uno les deje una propina —por ejemplo— nos entregarían billetes más *chicos* que grandes, o si tuvieran ellos mucho cambio a mano, también nos darían más billetes o monedas más *chicas* que grandes. Concédame, entonces, la licencia de haber *imaginado* un *caso* sin este tipo de «*distorsiones*». <<

www.elsolucionario.org

[67] Voy a suponer que el círculo tiene radio 1. Lo que importa es detectar que cualquiera sea el radio R, la proporción entre las áreas de los dos cuadrados se mantendrá constante (¡verifíquelo!). Mirando la figura 3, uno advierte que la mitad de la diagonal del cuadrado es 1. Llamo A a la mitad del lado del cuadrado chico. Por el teorema de Pitágoras, $1 = \sqrt{(2.A^2)}$. Luego, despejando, descubrimos que $A = 1/\sqrt{2}$, o lo que es lo mismo, $A = \sqrt{2}/2$. Pero como A mide solamente la mitad del lado del cuadrado chico, el lado propiamente dicho mide 2A, o sea, $\sqrt{2}$. En consecuencia, como el área de un cuadrado se mide multiplicando los lados, en este caso se tiene $(\sqrt{2}).(\sqrt{2}) = 2$. Moraleja: Área del cuadrado chico = 2. Por otro lado, calculemos ahora el área del cuadrado grande. Si uno mira la figura 3 descubre que como el radio del círculo es 1, entonces, la *mitad* del lado del cuadrado grande mide 1. Así, el lado de este cuadrado mide 2. Luego, el cuadrado grande tiene área 4. Segunda moraleja: El área del cuadrado grande es igual a 4. Resumen: el cuadrado grande tiene *el doble* del área del cuadrado chico. <<

[68] Escribí «casi» porque Ginóbili me dijo que en la primera práctica que hizo con sus compañeros de San Antonio le planteó el problema a todos. Uno de los jugadores, Matt Bonner, lo resolvió en diez minutos. Cuando le pregunté a Manu si existía la posibilidad de que Bonner conociera el problema desde antes me dijo que no creía por el tipo de preguntas que le había hecho. Por lo tanto, *siempre* es posible que a alguna o algunas personas se le ocurran caminos más directos y más rápidos. De todas formas, ¿qué importancia tiene? Si yo logro que usted se interese un rato con el enunciado y le dedique un poco de su tiempo a pensarlo, ya habrá valido la pena haberlo escrito. <<

www.elsolucionario.org

[69] No quiere decir que no se me pueda escapar algo que yo creí que era accesible y después no fue así, pero en todo caso mi intención es siempre ofrecer alternativas lógicas y no tramposas. <<

[70] Carlos D’Andrea me hizo una observación muy interesante: si en lugar de pastillas se tratara de *perros* o *heladeras o* cualquier objeto indivisible, la solución planteada no sería posible. Y creo que eso *también* hay que tenerlo en cuenta. <<

www.elsolucionario.org

[71] Hay una pequeña *sutileza* involucrada en todo esto, y es que uno asume que, por el hecho de mentir, el guardián dirá siempre «*lo contrario*» de lo que diría el que dice la verdad. Pero ¿qué ocurriría si la respuesta del guardián que miente fuera «*te diría que mañana gana Boca*»? <<

[72] Se entiende que con el bolo que va sobre el número 5. <<

www.elsolucionario.org

[73] A partir del momento en el que queda establecido la medida del número *uno*, es posible generar *todos los números reales*. Por supuesto, ese objetivo escapa a las intenciones de este libro, pero si usted está interesado en el tema, la *construcción* de los números reales es algo apasionante y no muy difícil. <<

[74] Quizás convenga agregar acá que en la antigua Grecia los *números eran «mirados»* de esta forma, como longitudes de segmentos y no con su desarrollo decimal como hacemos ahora. Las operaciones entre los números se hacían de la forma en que las describí y *no* como hacemos ahora. <<

www.elsolucionario.org

[75] La «generala» es el juego de dados más practicado en Sudamérica. A los efectos del problema planteado, alcanza con saber que si al arrojar los cinco dados, aparecen los cinco del mismo número, eso se llama «generala servida». En cambio, si en lugar de cinco iguales, aparecen cuatro con el mismo número y el restante dado con otro número cualquiera, entonces el resultado se llama «poker». <<

[76] Hay una observación más para hacer: todos estos *eventos* son «disjuntos», en el sentido que si uno saca poker con los cuatro primeros dados, no puede al mismo tiempo haber sacado poker con los cuatro últimos. Por esa razón es que multipliqué las cinco formas por 5 y descubrimos que hay 25 maneras de obtener poker de «unos». <<

www.elsolucionario.org

[77] E igual que en el paso anterior: un poker de 6 en los cuatro últimos dados no puede coincidir con un poker de 3 con los primeros cuatro dados, y por eso puedo multiplicar nuevamente. <<

[78] Es que los pares que pueden aparecer son: 1-1, 1-2, 1-3, 1-4, 1-5, 2-1, 2-2, 2-3, 2-4, 2-5, 3-1, 3-2, 3-3, 3-4, 3-5, 4-1, 4-2, 4-3, 4-4, 4-5, 5-1, 5-2, 5-3, 5-4 y 5-5. <<

www.elsolucionario.org

[79] Este problema se lo escuché contar a Peter Winkler, pero él le atribuye la autoría a Elwyn Berlekamp, John Conway y Richard Guy. En cualquier caso, el crédito les corresponde a ellos y no a mí. <<

[80] Un cuadrado mágico consiste en una grilla de tres filas y tres columnas ocupadas por números, de manera tal que las tres filas, las tres columnas y las dos diagonales suman lo mismo. <<

www.elsolucionario.org

[81] Un cuadrado construido con tres filas y tres columnas que hay que rellenar con «cruces» y «círculos» en forma alternada entre dos jugadores. El primero que completa alguna línea horizontal, vertical o diagonal con tres símbolos iguales gana el juego. <<

[82] Se supone que los ingredientes utilizados para la pizza más grande son los mismos que se utilizaron para la más chica y se guardan las mismas proporciones. <<

www.elsolucionario.org

[83] Octuplica = multiplicar por ocho. <<

[84] Mientras la fórmula para calcular la superficie de un círculo (la pizza) es ($\pi.r^2$), el del volumen de una esfera es $4 / 3 \times (\pi.r^3)$, por lo que se «ve» que al duplicarse el radio (o el diámetro), en el caso de la superficie, el área se cuadruplica y el volumen hay que multiplicarlo por 8, ya que $2^3 = 8$. <<

www.elsolucionario.org

[85] En el Episodio 1 de *Matemática… ¿estás ahí?*, en la página 150 hay un problema en donde hay que decidir cómo elegir entre dos alternativas con una moneda «cargada». <<

[86] C = cara, X = ceca <<

www.elsolucionario.org

[87] Veamos los casos que faltan:

1) CCCX
2) CCXC
3) CXCC
4) XCCC
5) CCCC
6) XXXC
7) XXCX
8) XCXX
9) CXXX
10) XXXX

La probabilidad de que salgan las numeradas del 1 al 4 (o sea, tres caras y una ceca) es:

“ $p^3 \times q$

La probabilidad de que salga la número 5 (o sea, cuatro caras), es

“ p^4

La probabilidad de que salgan las numeradas de la 6 a la 9 (o sea, tres cecas y una cara) es:

“ $q^3 \times p$

Y, por último, la probabilidad de que salga la número 10, o sea, cuatro cecas, es:

“ q^4

<<

[88] Las ideas que aparecen en este problema les pertenecen *todas* a Pablo Milrud y Pablo Coll. Yo solamente sirvo de «intermediario». <<

www.elsolucionario.org

[89] Obviamente, no hay ninguna razón para suponer que la ayuda de la matemática ofrece la mejor solución, pero son las que yo puedo brindar acá. <<

[90] El resultado sería *exactamente 1* si uno hubiera multiplicado el número decimal completo que aparece después de la coma. Como eso no es posible, obtuvimos 0,9996 que es *casi* igual a 1. <<

www.elsolucionario.org

[91] La circunferencia es el «borde» del círculo. Mientras la circunferencia es unidimensional, el círculo es una superficie. <<

[92] Ian Stewart es un matemático inglés, quien después del fallecimiento de Martin Gardner quedó en un grupo reducido de los mejores del mundo en la difusión de la matemática, y en particular de la matemática recreativa. El nombre de la historia, «La lotería infinita», se debe a ambos: Smullyan y Stewart. <<

www.elsolucionario.org

[93] Aunque parezca *redundante* que escriba *finitas* bolitas, es importante enfatizar que éste es el caso. Por ejemplo, si estuviéramos hablando de *números,* el conjunto podría ser *infinito,* como, por ejemplo, lo son todos los números naturales. <<

[94] Para ser matemáticamente más rigurosos, para considerar el problema «resuelto» uno podría apelar al Principio de Inducción Completa (una de las herramientas más poderosas que la matemática ofrece cuando se trata de probar propiedades que involucren a los números enteros). En ese caso, haciendo *inducción* en *n*, el número más grande de todos los que figuran en la caja, es fácil convencerse de que el proceso inexorablemente termina obligándolo a excluir todas las bolitas de la caja. Tardará mucho o no, pero no hay estrategia posible que asegure que uno *siempre* tenga bolitas para excluir. <<

www.elsolucionario.org

[95] Por ejemplo, si se pudieran elegir infinitas bolitas, uno podría poner en la caja bolitas con los números 1, 2, 3, 4, 5…, *n*… y así siguiendo. Está claro que entonces el proceso no terminaría nunca, cosa que no puede suceder (como vimos) si el número de bolitas es *finito.* <<

[96] Los datos sobre *El hombre que calculaba* son muy controversiales. Hay quienes sostienen que el libro fue publicado por primera vez en 1949, y otros que su primera edición data de 1938. Quienes lean este artículo, tengan la generosidad de comprender que mi idea es rendirle tributo a la esencia: el contenido. La veracidad de la historia que rodea al libro, no sólo se me escapa, sino que a los efectos de lo que pretendo hacer acá resulta irrelevante. <<

www.elsolucionario.org

[97] El crédito por esta idea (acerca de la divisibilidad por 7) les corresponde a Alfred S. Posamentier e Ingar Lehman, que son los autores del libro *Mathematical Amazements and Surprises*. Lo único que hice yo fue adaptarlo para esta publicación. <<

[98] En realidad, uno podría iterar el proceso una vez más. Empieza con 84, «quita» el 4, y resta el doble de 4 (o sea 8). Empieza con 84, al retirar el 4 se queda con 8, y como hay que «restar» el doble de 4, o sea 8, la resta es ¡cero! Pero esto no ofrece ninguna contradicción, porque el número 0 es *múltiplo de todos los números.* Por lo tanto, como 0 es múltiplo de 7, el número original (873.852) es múltiplo de 7 también. <<

www.elsolucionario.org

[99] Si a = 7 × b y c = 7 × d, entonces (a ± c) = (7b ± 7d) = 7 (b ± d) y, por lo tanto, resulta múltiplo de 7. <<

[100] Para usar la nomenclatura precisa, uno debería decir que al restar «copias» de 7, tanto el número original como el que se obtiene, son «congruentes del módulo 7». <<

www.elsolucionario.org

[101] Para quienes estén interesados en criterios de divisibilidad como el que acabamos de ver para el número 7, también existen otros similares para 13, multiplicando por 9 en lugar de por 2, y para 17, multiplicando por 5 en vez de por 2. <<

[102] En este caso, P(n) – 4n – 1007. Más en general, si *n* es un número que tiene *k* dígitos, entonces el número de dígitos que hace falta usar es:

$P(n) = k \times n - [(10^k - 1)/9] - k.$

www.elsolucionario.org

[103] Me tomo la licencia de imaginarme la ciudad como si fuera *plana*, de manera que tenga sentido decir que uno va a colorear cada punto. <<

[104] Si uno *extiende* este argumento que utiliza el *triángulo equilátero,* en realidad, se puede probar algo mucho más fuerte: «hay *infinitos pares* de puntos del mismo color que están separados por un kilómetro». ¿Por qué? Tome dos puntos cualesquiera que estén a un kilómetro de distancia. Si los dos son del mismo color, listo. Si no, formo un triángulo equilátero cuyos lados midan un kilómetro y que uno de los dos lados esté formado por los dos puntos originales. El tercero, entonces, tendrá que ser del color de uno de los dos, y justamente esos dos puntos estarán separados también por un kilómetro. <<

www.elsolucionario.org

[105] O sea, exhiba un orden de las cartas, en donde no importa cuántos pasos uno dé, *nunca* se llega a tener un número 1 en el primer lugar. <<

[106] Un «*ciclo*» es una posición tal que, después de un número finito de pasos, si uno itera desde allí con las instrucciones del proceso, se llega a la misma posición inicial. <<

www.elsolucionario.org

[107] Las candidatas a ser «primera carta» son cualquiera de las 6 que elegimos: 1, 2, 3, 4, 5 y 6. Pero el 6 ya no puede ser más, hemos eliminado el 5 también, y con el razonamiento que hicimos vamos eliminando posibilidades y cada vez *reduciendo* el valor de esa primera carta, hasta que se llega al 1. <<

[108] En realidad, todo número real positivo tiene *dos* raíces cuadradas: una positiva y otra negativa. Por ejemplo, las dos raíces cuadradas de 16 son: 4 y (-4). Es que **$4 \times 4 = 4^2 = 16$, pero, por otro lado, (-4) también cumple la misma propiedad: $(-4)^2 = (-4) \times (-4) = 16$**. En el caso que nos ocupa, yo estoy suponiendo que uno elige la *raíz cuadrada **positiva***. <<

www.elsolucionario.org

[109] Si uno tiene un número natural cualquiera, digamos 15, sus *divisores* son los números que «lo dividen exactamente». En el caso del 15, sus divisores son: 1, 3, 5 y 15. ¿Por qué? Porque son los *únicos* números en los cuales se puede *dividir* al número 15 en forma exacta. De hecho, 15 dividido 1 es igual a 15, 15 dividido 3 es igual a 5, 15 dividido 5 es igual a 3 y 15 dividido 15 es igual a 1. Pruebe tratando de dividir a 15 por cualquier otro número, y verá que ya no lo puede hacer en forma *exacta.* <<

[110] Queda excluido el número 1, porque 1 *no tiene exactamente dos divisores positivos*, sino solamente uno: él mismo. <<

www.elsolucionario.org

[111] No incluyo ni al 1, ni al 4 ni al 9, porque acá el primer dígito —aunque no se ve— es el número cero, pero el cero está excluido entre los dígitos que buscamos. <<

[112] Y porque 3 + 4 + 3 = 10, que no es más un dígito. <<

www.elsolucionario.org

[113] Como usted advierte, los últimos cuatro renglones son redundantes, ya que están contemplados entre los primeros cinco, pero los escribí igual por razones de *simetría.* <<

[114] Ningún mazo de cartas contiene los números del 1 al 27, pero a los efectos prácticos de la explicación que vamos a presentar, lo que importa es *mostrar* cómo hacen los magos para *descubrir* una carta que alguien *pensó*, independientemente de cuál sea. <<

www.elsolucionario.org

[115] Las versiones que usted va a leer son las originales de Juan. Las dejé porque me parecen muy ilustrativas de su forma de escribir. Y de su humor también. <<

[116] Tal como sucede en algunos juegos de cartas, uno se permite hacer una escalera *sin tener que detenerse en una K.* Por ejemplo, uno podría tener una escalera formada por K, A y 2 de corazón, o bien, Q, K, A y 2 de trébol. <<

www.elsolucionario.org

[117] Este problema lo vi en una serie llamada *Mental Gymnastics*, cuyo autor es Dick Hess. El crédito, como corresponde, es para él. <<

[118] Ya lo escribí anteriormente, pero tanto Carlos Sarraute como Ariel Futoransky, Aureliano Calvo y Ariel Waissbein son una usina generadora de problemas. Los cuatro son informáticos, programadores. *Viven* pensando en cómo resolver situaciones que parecen no tener solución. A los cuatro, gracias. Sin ellos, no hubiera podido escribir este problema sobre los barriles envenenados. El crédito es todo para ellos, ya que son los autores de la *idea*, que, en definitiva, es lo *único* que importa. <<

www.elsolucionario.org

[119] El hecho de que ninguno se enferme es parte del que «pase algo». O sea, que no pase *nada* dice también *cosas* sobre cada barril. <<

[120] Como usted advierte, cada vez que uno incrementa el número de personas que revisan los barriles, el número de barriles entre los que uno puede detectar el que tiene el agua contaminada se multiplica por 3. La fórmula general dice que, si uno tiene *n* personas, se pueden investigar 3^n barriles. <<

www.elsolucionario.org

[121] Martin Gardner (1914-2010) fue la persona que más incidencia tuvo *en el mundo occidental* en la difusión de la matemática recreativa. Sus columnas en el *Scientific American* fueron (y son) una fuente inagotable de ideas. ¿De cuántas personas se puede decir eso? <<

[122] En realidad, elegí *uno* y *dos* kilos como peso para las bolillas, pero esencialmente lo que importa es que hay tres bolillas que pesan más (todas iguales entre sí, y una de cada color). <<

www.elsolucionario.org

[123] Intente usted analizar por su cuenta el caso (c) y descubrirá que termina recorriendo el mismo camino que yo utilicé en el caso (b), sólo que con otras bolitas. <<